ESERCIZI SUI CIRCUITI RC

Problema 1

Due condensatori di capacità $C = 6\ \mu$F, due resistenze $R = 2.2$ kΩ ed una batteria da 12 V sono collegati in serie come in Figura 1a. I condensatori sono inizialmente scarichi. Calcolare:

- la corrente iniziale nel circuito (cioè non appena il circuito viene chiuso)
- il tempo necessario perché la corrente scenda al valore $I = 1.2$ mA

Soluzione

È immediato osservare che il circuito proposto è equivalente ad un circuito con resistenza, capacità e generatore di tensione in serie. Le due resistenze sono infatti equivalenti alla resistenza:

$$R_{\text{eq}} = R + R = 2R = 4.4\ \text{k}\Omega\ , \tag{1}$$

mentre le due capacità in serie sono equivalenti alla capacità:

$$C_{\text{eq}} = \frac{C}{2} = 3\ \mu\text{F}\ . \tag{2}$$

Il circuito equivalente è mostrato in Figura 1b.

Alla chiusura dell'interruttore, il condensatore C_{eq} inizia a "sentire" la differenza di potenziale fornita dal generatore, e dunque inizia ad accumularsi carica sulle sue armature, permettendo il passaggio di corrente lungo il circuito. Per $t \to \infty$, fra le armature del condensatore vi sarà una d.d.p. pari alla tensione fornita dal generatore: a quel punto, nel circuito non scorrerà più corrente. La presenza della resistenza ha l'effetto di distribuire nel tempo il caricamento del condensatore: se i collegamenti fra il generatore e il condensatore non prresentassero resistenza, la carica del condensatore avverrebbe idealmente in un tempo istantaneo.

L'accumulo della carica sulle armature del condensatore, l'aumento della d.d.p. fra le armature stesse, e infine l'andamento dell'intensità di corrente nel circuito sono tutti governati da andamenti di tipo esponenziale. In particolare, risulta rilevante ai fini del problema l'andamento dell'intensità di corrente $I(t)$: si può dimostrare che

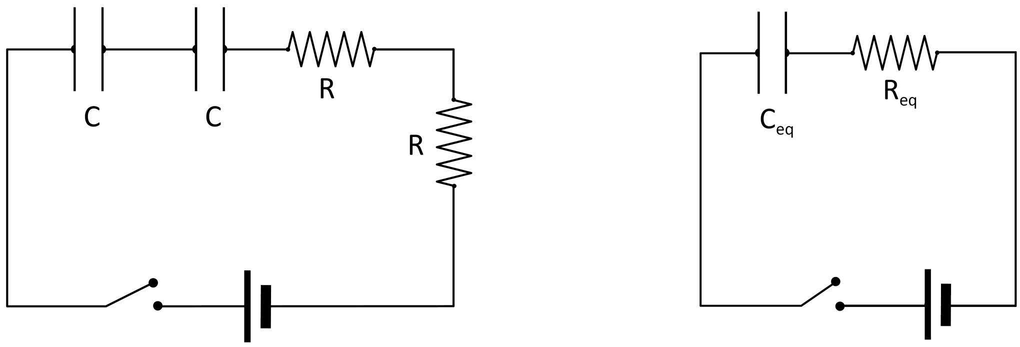
$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}\ , \tag{3}$$

dove V è la tensione fornita dal generatore,

$$\tau = R_{\text{eq}} C_{\text{eq}} = 0.0132\ \text{s} \qquad \text{e} \qquad I_0 = \frac{V}{R_{\text{eq}}} \tag{4}$$

Il parametro τ è noto come *costante di tempo* del circuito RC. Ponendo $t = 0$ nell'Eq. 3 si trova immediatamente che $I(0) = I_0$, cioè l'intensità di corrente presente nel circuito all'istante in cui inizia la carica del condensatore è pari a

$$I(0) = \frac{V}{R_{\text{eq}}} = \frac{12\ \text{V}}{4.4\ \text{k}\Omega} \approx 2.7\ \text{mA}\ . \tag{5}$$



(a) Circuito originale

(b) Circuito equivalente

Figura 1: Problema 1

Per valutare a quale istante t^* la corrente scenda al valore di $I(t^*) = 1.2$ mA, è sufficiente imporre che:

$$I(t^*) = I_0 e^{-t^*/\tau} \quad \Rightarrow \quad 1.2 \text{ mA} = (2.7 \text{ mA}) \times e^{-t^*/0.0132} \tag{6}$$

da cui si trova facilmente che $t^* \approx 0.011$ s.

È interessante notare come, all'istante in cui il condensatore inizia a caricarsi, il circuito "percepisca" il condensatore come un elemento circuitale privo di resistenza. In realtà, all'interno del condensatore *non* scorre mai alcuna corrente di cariche, ma questo per il resto del circuito è del tutto ininfluente: a tutti gli effetti, l'accumulo della carica sulle armature del condensatore produce nel resto del circuito un movimento di carica *equivalente* a quello che offrirebbe un elemento circuitale chiuso.

All'istante iniziale, peraltro, il condensatore è del tutto scarico, e dunque massimamente "disponibile" ad accogliere carica sulle sue armature: è questa estrema disponibilità a far sì che il tasso di accumulo della carica sulle armature possa sostenere (all'inizioe della carica, e nel caso ideale!) qualunque corrente sia determinata dagli altri elementi circuitali. Con il tempo, l'accumulo della cariche sulle armature inizia ad inibire l'arrivo di ulteriore carica: questo "frena" il movimento delle cariche nell'intero circuito, ovvero determina una diminuzione della corrente.

A tempi molto grandi, il condensatore ha esaurito la sua disponibilità di accumulo della carica, e dunque inibisce del tutto lo scorrimento di cariche lungo il circuito: la corrente è pari a zero.

Problema 2

Nel circuito in Figura 2 si hanno $R_1 = 850\ \Omega$, $R_2 = 250\ \Omega$, $R_3 = 750\ \Omega$, $C = 150\ \mu$F, $V = 12$ V. Inizialmente, l'interruttore è chiuso ed il condensatore è carico. All'istante $t = 0$ si apre l'interruttore ed il condensatore comincia a scaricarsi. Determinare:

- quanto vale la costante di tempo τ per la scarica
- quanto vale la tensione ai capi del condensatore dopo che è trascorso un tempo pari ad una volta la costante di tempo (cioè dopo un tempo $t = \tau$)

Soluzione

Nella situazione iniziale, nel ramo di circuito contenente il condensatore non scorre alcuna corrente. Il condensatore è infatti completamente carico: le sue armature non attraggono più alcuna carica, impedendo di fatto la circolazione di corrente nel ramo. La scarica non avviene perché il generatore di tensione mantiene una certa d.d.p. fra le armature. Essendo sullo stesso ramo del condensatore, neppure attraverso la resistenza R_3 scorre alcuna corrente, ed è dunque nulla la d.d.p. ai suoi capi.

L'apertura dell'interruttore produce due effetti: (i) nel ramo circuitale contenente l'interruttore stesso non scorrerà alcuna corrente; (ii) il condensatore non sentirà più la d.d.p. imposta dal generatore di tensione. Complessivamente, quindi, l'analisi del circuito si riduce a quella della sola **maglia di destra**: il ramo contenente l'interruttore aperto, nel quale non scorre alcuna corrente, non produce alcun effetto sul comportamento di tale maglia. È immediato notare come la maglia di destra sia un circuito RC privo di generatore di tensione, con resistenza equivalente $R_{\text{eq}} = R_2 + R_3 = 1000\ \Omega$. La costante di tempo che governa la scarica del condensatore lungo questo circuito è $\tau = CR_{\text{eq}} = 150\ \mu\text{F} \times 1000\ \Omega = 0.15$ s.

La d.d.p. V_C ai capi del condensatore diminuirà nel tempo tendendo ad annullarsi, per effetto del riequilibrio delle cariche che scorreranno da un'armatura all'altra attraverso la resistenza. La legge temporale è esponenziale:

$$V_C(t) = V_C(0)e^{-t/\tau} \tag{7}$$

dove $V_C(0)$ è naturalmente la d.d.p. presente fra le armature del condesatore all'istante iniziale, quando viene aperto l'interruttore e la scarica può avere luogo. Dopo un tempo pari a $t = \tau$ la d.d.p. fra le armature del condensatore varrà $V_C(\tau) = V_C(0)/e$. Per determinare il valore di $V_C(0)$, notiamo che all'istante in cui inizia la scarica del condensatore, fra le armature è presente la stessa d.d.p. esistente ai capi della resistenza R_2: questo perché $-$ come già notato $-$ fino a quando il condensatore è carico, nel suo ramo circuitale non scorre alcuna corrente, e dunque nessuna caduta di potenziale si osserva attraverso la resistenza R_3.

Il problema si sposta dunque sulla determinazione della d.d.p. fra i capi della resistenza R_2 nella condizione in cui l'interruttore è chiuso. In questa situazione, l'analisi del circuito si riduce a quella della sola **maglia di sinistra**, contenente le resistenze R_1 e R_2 in serie con il generatore di tensione. Il problema è quello classico del partitore di tensione: si vuole determinare come si ripartisce la d.d.p. fornita dal generatore ai capi di ciascuna

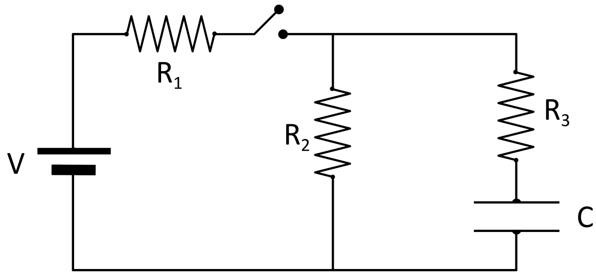


Figura 2: Problema 2

delle due resistenze. La soluzione si trova facilmente considerando che la corrente che scorre nel crcuito è pari a

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} \ , \tag{8}$$

il che comporta che ai capi di ciascuna delle due resistenze (attraverso le quali, essendo collegate in serie, scorre la medesima corrente I) siano presenti le d.d.p. V_1 e V_2 rispettivamente pari a:

$$V_1 = IR_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V \qquad\qquad V_2 = IR_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \tag{9}$$

È importante notare che la d.d.p. fornita dal generatore si distribuisce ai capi delle resistenze in misura proporzionale al loro valore. La d.d.p. ai capi della resistenza R_2, e dunque presente sulle armature del condensatore, è allora pari a:

$$V_2 = V_C(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V = \frac{250\ \Omega}{1100\ \Omega} \times 12\ \text{V} \approx 2.73\ \text{V} \tag{10}$$

Dopo un tempo pari a $t = \tau$ dall'inizio della scarica del condensatore, fra le sue armature sarà dunque presenta una d.d.p. pari a

$$V_C(\tau) = V_C(0)/e \approx 1\ \text{V} \tag{11}$$

Problema 3

La Figura 3 mostra il circuito di alimentazione di una lampadina a intermittenza. La lampadina fluorescente L è collegata in parallelo al condensatore C di un circuito RC. La corrente scorre soltanto quando il potenziale raggiunge il valore di innesco V_L: quando ciò avviene, il condensatore si scarica sulla lampada e produce un lampo molto breve. Si supponga che sia necessario avere due lampi al secondo. Utilizzando una lampada con una tensione d'innesco $V_L = 72$ V, una batteria da 95 V e un condensatore da 0.5 μF, quale dev'essere la resistenza R del resistore?

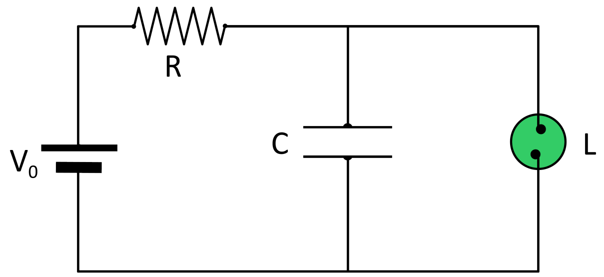


Figura 3: Circuito di alimentazione di una lampadina ad intermittenza

Soluzione

Risulta conveniente considerare il comportamento del circuito nel momento appena successivo ad uno dei lampi della lampadina L, quando il condensatore è completamente scarico e il ramo di destra del circuito è aperto (perché nella lampadina non passa corrente): in queste condizioni, il ramo contenente la lampadina non influisce sul comportamento del resto del circuito, che si comporta come un circuito RC con generatore di tensione. Il condensatore, completamente scarico, inizia a caricarsi con costante di tempo $\tau = RC$.

Durante la fase di carica, la d.d.p. V_C presente fra le armature del condesatore (inizialmente nulla) aumenta nel tempo con legge esponenziale, tendendo per $t \to \infty$ al valore limite V_0 corrispondente alla d.d.p. fornita dal generatore:

$$V_C(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{12}$$

La d.d.p. fra le armature del condensatore è la medesima che viene percepita ai capi della lampadina L: per questo motivo, nel momento in cui V_C raggiunge il valore d'innesco di 72 V, la lampadina diventa conduttrice e il condensatore si scarica su di essa producendo un lampo. Dopo il lampo, V_C torna *istantaneamente* a zero. L'instantaneità del processo di scarica fa in modo che il condensatore possa riportare a zero la d.d.p. fra le sue armature prima che il generatore di tensione possa far sentire nuovamente il suo effetto.

Immediatamente dopo il lampo, ricomincia il processo di carica del condensatore (il ciclo si ripete periodicamente: provare a rappresentare graficamente l'andamento della tensione V_C in funzione del tempo).

Secondo quanto richiesto dal problema, occorre chiedere che la tensione d'innesco $V_L = 72$ V venga raggiunta fra le armature del condensatore dopo un tempo pari a

$t^* = 0.5$ s dal lampo precedente (cioè dall'inizio della carica del condensatore). Dunque si ha:

$$V_C(0.5) = 72 \text{ V} \qquad \Rightarrow \qquad \left(1 - e^{-0.5/\tau}\right) \times 95 \text{ V} = 72 \text{ V} \ , \tag{13}$$

da cui si trova facilmente che:

$$\tau = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1 - \frac{72}{95}\right)^{-1}\right]^{-1} \approx 0.35 \text{ s} \tag{14}$$

Dal momento che $\tau = RC$, si trova immediatamente che $R \approx 2.33$ MΩ.