

IDROSTATICA

esercizi risolti

In questa dispensa verrà riportato lo svolgimento di alcuni esercizi inerenti la statica dei fluidi, nei quali vengono discusse proprietà dei fluidi in quiete.

Riprendiamo alcuni concetti utili.

- **Densità:** per un qualsiasi corpo, è definita come rapporto fra la massa ed il volume:

$$d = \frac{m}{V}$$

Nel S.I. si misura in kg/m^3 , ma altre unità sono il kg/dm^3 oppure il g/cm^3 .

- **Pressione:** E' definita per tutti i corpi e viene calcolata facendo il rapporto fra il modulo della forza F agente e la superficie S sui cui agisce la forza, in formule:

$$P = \frac{F}{S}$$

La pressione si misura nel S.I. in Pascal ($1Pa=1N/1m^2$). Altre unità di misura sono il Bar = 10^5Pa e l'Atmosfera ($1atm = 1,013 \text{ Bar}$)

- **Legge di Stevino:** Ci dà la pressione che un fluido esercita ad una certa profondità, dipendente solo dalla sua densità d e non dalla superficie su cui agisce. Vale:

$$P = d \cdot g \cdot h$$

essendo g l'accelerazione di gravità terrestre (che vale $9,81m/s^2$).

- **Spinta di Archimede:** E' la forza che un corpo immerso in un fluido subisce per effetto del fluido stesso. E' diretta sempre verso l'alto ed è pari al peso del liquido spostato. In formule vale:

$$\xi_a = d_{liquido} \cdot V_{Solido \text{ immerso}} \cdot g$$

1

LA LEGGE DI STEVINO

Quanto deve essere alto un tubo riempito di mercurio ($d = 13.590 \text{ Kg}/m^3$) per esercitare sulla base una pressione di $2Atm$ sulla sua base?

Si tratta di un'applicazione inversa della legge di Stevino: tale esercizio ha lo scopo di familiarizzare con i calcoli.

Se

$$P = d \cdot g \cdot h$$

allora è ovvio che:

$$h = \frac{P}{g \cdot d}$$

Inserendo i valori numerici, dobbiamo fare attenzione nell'esprimere tutte le misure in unità del S.I. E' pertanto necessario trasformare la pressione in Pascal:

$$2Atm = 2 \cdot 1,013 \cdot 10^5 Pa = 2,026 \cdot 10^5 Pa$$

Quindi:

$$h = \frac{2,026 \cdot 10^5}{9,81 \cdot 13.590} = 1,52 m$$

2

Una pompa idraulica deve sollevare l'acqua di una condotta fino ad un serbatoio posto su un grattacielo alto 130m. Quale pressione è necessaria per effettuare questa operazione?

E' ovvio che per sollevare un liquido ad una altezza h è necessario applicare una pressione almeno uguale a quella idrostatica prodotta dalla colonna di liquido alta h , ossia

$$P_{applicata} = P_{Stevino} = d \cdot g \cdot h$$

Nel nostro caso:

$$P_{applicata} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 130 = 1.275.300 Pa = 12,6 Atm$$

3

Su una fiancata di una nave si apre una falla di $75cm^2$ di area, a 4,5 metro sotto la superficie di galleggiamento. Sapendo che la densità dell'acqua marina è $d = 1030 Kg/m^3$, calcola quale forza è necessario applicare dall'interno per opporsi all'apertura della falla

La forza F in questione sarà quella uguale e contraria alla forza dovuta alla pressione idrostatica esercitata dall'acqua marina a 4,5 metri di profondità sulla superficie della falla.

Se $P = \frac{F}{S}$, allora $F = P \cdot S$, quindi:

$$F = d \cdot g \cdot h \cdot S$$

Convertiamo la superficie in m^2 : $75cm^2 = 0,75dm^2 = 0,0075m^2$, pertanto:

$$F = 1030 \cdot 9,81 \cdot 4,5 \cdot 0,0075 = 341N$$

4

Il petrolio intubato dentro ad un foro di trivellazione a causa delle spinte interne di natura geologica, ha una pressione verso l'alto di $2800N/cm^2$. Per contrastare la risalita del greggio si immette nel tubo una miscela di acqua e fango, di densità $d = 2,5 \cdot 10^3 Kg/m^3$. Quanto deve essere alta la colonna di fango per contrastare adeguatamente la fuoriuscita del greggio?

La spinta del petrolio può essere contrastata grazie alla pressione idrostatica di una colonna di fango ed acqua di altezza h , affinché la sua pressione equivalga a quella del greggio.

Se $P_{fango} = d_{fango} \cdot g \cdot h$ e $P_{fango} = P_{petrolio}$, allora:

$$h_{fango} = \frac{P_{petrolio}}{d_{fango} \cdot g}$$

con $P_{petrolio}$ espressa però in unità del S.I., ossia in Pascal = N/m^2 .

Convertendo, si ha, visto che $1cm^2 = 1 \cdot 10^{-4}m^2$,

$$P_{petrolio} = \frac{2800}{1 \cdot 10^{-4}} = 2,8 \cdot 10^7$$

Inserendo i dati, si ha che:

$$h = \frac{2,8 \cdot 10^7}{2,5 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 1141,7m$$

5

L'EQUILIBRIO DI PRESSIONE

Un cilindro C di massa $m = 1000\text{Kg}$ e di sezione $S_2 = 3\text{dm}^3$ è appoggiato sulla superficie libera di un fluido di densità $d = 800\text{Kg/m}^3$. All'altra estremità del tubo un pistone P di sezione $S_1 = 25\text{cm}^2$ tiene in equilibrio il fluido, agendo sulla sommità di una colonna di fluido alta $h = 3\text{m}$. Calcolare la massa del pistone P

Tale sistema fisico assomiglia ad un torchio idraulico (vedesi la fig. dell'es. 60 pag.462 del testo) e si trova in equilibrio perchè le due pressioni agenti sulle due superfici libere sono uguali, a norma del Principio di Pascal. Si attua quindi un equilibrio di pressioni che si può scrivere come segue:

$$P_{\text{peso pistone}} + P_{\text{Colonna liquido}} = P_{\text{Peso cilindro}}$$

In tale relazione l'incognita è $P_{\text{peso pistone}}$, che ci permetterà poi di calcolare la F_P esercitata dal pistone stesso e quindi la sua massa. Sia $x = P_{\text{peso pistone}}$.

La pressione idrostatica della colonna di liquido vale:

$$P_{\text{liquido}} = d \cdot g \cdot h = 800 \cdot 9,81 \cdot 3 = 23.544\text{Pa}$$

La pressione dovuta al peso del cilindro vale invece:

$$P_{\text{cil}} = \frac{F_P}{S_2} = \frac{1000 \cdot 9,81}{0,03} = 327.000\text{Pa}$$

ove si sia trasformata la sezione di 3dm^2 in metri quadri.

Dall'equilibrio di pressione si ha:

$$x + 23.544 = 327.000 \Rightarrow x = 327.000 - 23.544 = 303.456\text{Pa}$$

Se ora la sezione vale $S_1 = 25\text{cm}^2 = 0,0025\text{m}^2$ e $F = P \cdot S$, si ha:

$$F_{\text{pistone}} \Rightarrow 758,64\text{N}$$

che corrisponde ad una massa di circa 77 Kg

6

Si deve sollevare un'automobile di massa $m_a = 1200\text{Kg}$ con un torchio idraulico, poggiandola su una piattaforma di $S_a = 5\text{m}^2$ di superficie. Avendo a disposizione un pistone di superficie $S_P = 3,5\text{dm}^2$, calcolare quale è la minima forza da applicare sul pistone per poter sollevare l'automobile.

Il principio di funzionamento di un torchio idraulico si basa sul principio di Pascal, secondo il quale una pressione applicata sul pistone mobile si propaga inalterata anche alla piattaforma su cui poggia il veicolo. Il fatto che le pressioni debbano quindi essere uguali, fa sì che coincidano anche i rapporti $\frac{F}{S}$, ovvero si eguagliano i prodotti:

$$F_{\text{pistone}} \cdot S_{\text{auto}} = F_{\text{auto}} \cdot S_{\text{pistone}}$$

Pertanto, da tale ultima uguaglianza si avrà che:

$$F_{\text{pistone}} = \frac{F_{\text{auto}} \cdot S_{\text{pistone}}}{S_{\text{auto}}}$$

Se $F_{auto} = m_{auto} \cdot g = 11.772N$, trasformando la superficie del pistone in m^2 , $S_{pistone} = 0,035m^2$, si ha:

$$F_{pistone} = \frac{11.772 \cdot 0,035}{5} = 82,404N$$

Questa forza è molto più piccola di quella dovuta al peso dell'auto e può essere prodotta, per esempio, appoggiando sulla superficie del pistone, una massa di soli $m = 8,4Kg$.

7

LA PERDITA DI PESO

Un fusto metallico vuoto di $m = 4Kg$ di massa e capacità di 5 litri viene completamente immerso attraverso una fune in una vasca piena di olio $d = 765Kg/m^3$. Calcolare la spinta di Archimede subita dal fusto e la tensione che deve avere la fune per mantenerlo in equilibrio all'interno del liquido.

Ricordando il concetto di Spinta di Archimede, basterà effettuare il seguente calcolo:

$$S_a = d_{olio} \cdot V_{fusto} \cdot 9,81$$

Ricordando che 1 litro = $1dm^3$, si ha che $V_{fusto} = 0,005m^3$, quindi:

$$S_a = 765 \cdot 0,005 \cdot 9,81 = 37,52N$$

La tensione della fune τ sarà la forza uguale e contraria alla forza peso netta che agisce sul fusto, che è naturalmente la differenza fra la forza-peso che il fusto subirebbe fuori dal liquido e la spinta di Archimede. Tale differenza di forze si chiama anche perdita di peso. Si ha quindi che:

$$\tau = F_p - S_a = 4 \cdot 9,81 - 37,52 = 1,72N$$

8

DENSITA' RELATIVA

Un corpo in aria pesa 500N, mentre quando è immerso in acqua pesa 460N. Determinare il suo volume e la sua densità relativa rispetto all'acqua

Per quanto visto nell'es.precedente, la perdita di peso è ascrivibile all'azione della spinta di Archimede, dunque:

$$F_{acqua} = F_{aria} - S_a \Rightarrow S_a = F_{aria} - F_{acqua} = 40N$$

Ricordando che $S_a = d_{liquido} \cdot V_{immerso} \cdot 9,81$, si ha:

$$V_{corpo} = \frac{S_a}{d_{liquido} \cdot 9,81} = 0,004m^3 = 4dm^3$$

Per densità relativa si intende il rapporto fra la densità del corpo stesso e quella dell'acqua, ossia:

$$d_r = \frac{d_{corpo}}{d_{acqua}}$$

Per calcolare la densità del corpo basta effettuare il rapporto $d = \frac{m}{V}$. La massa è ricavata dalla forza-peso subita fuori dal liquido:

$$m = \frac{F_p}{9,81} = 51Kg$$

Quindi:

$$d = \frac{51}{0,004} = 12742,1 \text{Kg/m}^3$$

La densità relativa vale allora

$$d_r = \frac{12742,1}{1000} = 12,74$$

Notare che tale grandezza è adimensionale, visto che è il rapporto fra due grandezze identiche.

9

Un acquario è posto sopra una bilancia che misura una massa $m = 48\text{Kg}$. Si introducono cinque pesciolini rossi, ciascuno di volume pari a $3,3\text{cm}^3$. Quale valore della massa fornirà la bilancia dopo l'immersione dei pesciolini?

Ogni pesciolino subirà una spinta di Archimede per effetto dell'immersione in acqua: l'acqua spostata dal loro volume premerà però verso il basso, facendo aumentare il valore segnato dalla bilancia esattamente di una quantità pari alla spinta di Archimede complessiva:

$$S_{aTOT} = 5 \cdot d_{acqua} \cdot V_{pesce} \cdot 9,81 = 5 \cdot 1000 \cdot 3,3 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81 = 0,162\text{N}$$

Tale forza compete ad una massa di $0,0165\text{Kg}$, per cui la bilancia segnerà una massa finale di:

$$m_f = m_0 + 0,0165 = 48,0165\text{Kg}$$

10

GALLEGGIAMENTO E VOLUME IMMERSO

Una cassa galleggia sulla superficie del mare, affondando per $1/3$ del proprio volume. Calcolare la densità della sostanza di cui è fatta la cassa

La spinta di Archimede, e quindi il galleggiamento di un corpo solido immerso in un fluido, dipende dalla percentuale di volume immerso. Difatti, affinché il corpo galleggi è necessario che:

$$F_P = S_a \Leftrightarrow d_{corpo} \cdot V_{TOT} = d_{liquido} \cdot V_{solido\ immerso}$$

Nel nostro caso, se il corpo affonda per $1/3$ del proprio volume, significa che il rapporto fra volume immerso e volume totale è proprio $1/3$, cioè:

$$\frac{V_{solido\ immerso}}{V_{TOT}} = \frac{1}{3}$$

quindi, dalla condizione di galleggiamento scritta prima:

$$d_{corpo} = \frac{V_{immerso}}{V_{TOT}} \cdot d_{liquido} = \frac{1}{3} \cdot 1030 = 343,33\text{Kg/m}^3$$

11

Un iceberg, la cui forma può essere approssimata ad un cono di altezza 50m e raggio di base di 12m , galleggia sulla superficie del mare. Calcolare il volume della parte emersa, sapendo che la densità del ghiaccio è di $d = 920\text{Kg/m}^3$.

L'iceberg galleggia, quindi vale la condizione di galleggiamento già vista, secondo cui

$$d_{corpo} \cdot V_{TOT} = d_{liquido} \cdot V_{solido\ immerso}$$

La frazione di volume immersa sarà pertanto pari al rapporto fra la densità del ghiaccio e quella dell'acqua marina:

$$\frac{V_{\text{solido immerso}}}{V_{TOT}} = \frac{d_{\text{solido}}}{d_{\text{acqua}}} = \frac{920}{1030} = 0,89$$

Ciò significa che la parte immersa dell'iceberg è praticamente il 90%, ossia la parte emersa costituisce lo 0,11 del volume totale.

Calcolando il volume totale, esso è:

$$V_{TOT} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 7539,82m^3$$

Il volume emerso è pertanto:

$$V_{em} = 22619,5 \cdot 0,11 = 829,38m^3$$

Ragionando ora coi rapporti di similitudine, se i volumi stanno in rapporto k , le lunghezze staranno in rapporto $\sqrt[3]{k}$, ossia, il rapporto fra l'altezza della parte di dell'iceberg emersa e l'altezza totale dell'iceberg è di

$$\sqrt[3]{0,11} \simeq 0,48$$

. Ciò significa che l'altezza della parte emersa è:

$$h_{em} = 0,48 \cdot h = 0,48 \cdot 50 = 23,95m$$

12

In un pezzo di legno (densità $0,5 \text{ gr/cm}^3$) di massa 800 gr si pratica un foro di volume 200 cm^3 , riempiendolo di piombo (densità 11 gr/cm^3). In acqua il corpo galleggia o affonda?

Trasformiamo le unità di misura:

- $d_{\text{legno}} = 0,5 \text{ g/cm}^3 = 500 \text{ Kg/m}^3$
- $m_{\text{legno}} = 800 \text{ g} = 0,8 \text{ Kg}$
- $V_{\text{foro}} = 200 \text{ cm}^3 = 0,0002 \text{ m}^3$
- $d_{\text{piombo}} = 11 \text{ g/cm}^3 = 11.000 \text{ Kg/m}^3$

Il volume del solido intero vale

$$V_{tot} = \frac{m_{\text{legno}}}{d_{\text{legno}}} = 0,0016 \text{ m}^3$$

Il volume della cavità vale $0,0002 \text{ m}^3$, quindi il volume netto del legno sarà di

$$V_{\text{legno}} = 0,0016 - 0,0002 = 0,0014 \text{ m}^3$$

La massa della cavità riempita di piombo vale:

$$m_{\text{Piombo}} = V_{\text{foro}} \cdot d_{\text{Piombo}} = 2,200 \text{ Kg}$$

La forza peso è data da $F_p = m \cdot g = d \cdot V \cdot g$.

Nel nostro caso specifico la massa è quella di due materiali diversi, a cui competono volumi diversi, quindi:

$$F_p = (m_{\text{piombo}} + m_{\text{legno}}) \cdot g = 29,43 \text{ N}$$

La spinta di Archimede è data dal peso del liquido che tutto il solido sposta quando lo si immerge completamente in acqua e vale:

$$S_a = V_{tot} \cdot d_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g = 15,7 \text{ N}$$

Dal momento che si ha che $F_p > S_a$, il corpo, immerso nell'acqua, affonda!

13

Lo sportello di un sommergibile che si trova a 400 m di profondità nell'oceano subisce una forza di $2,026 \cdot 10^6 N$. Calcolare la superficie dello sportello, sapendo che l'acqua marina ha densità $1,03 \text{ gr/cm}^3$

Si sfrutta la definizione di pressione P :

$$P = \frac{F}{S}$$

indicando con F e S rispettivamente forza e superficie. Invertendo la relazione, la superficie si troverà

$$S = \frac{F}{p}$$

La pressione si ottiene dalla legge di Stevino:

$$p = h \cdot d_{H_2O} \cdot g$$

ove h è l'altezza della colonna d'acqua che sovrasta lo sportello, ossia 400 m. Quindi possiamo impostare la soluzione

$$S = \frac{2,026 \cdot 10^6}{400 \cdot 1030 \cdot 9,8} = 0,502 \text{ m}^2$$

14

Un pallone areostatico di 10 m^3 di volume è pieno di elio $d_{He} = 0,178 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$. Calcolare quale è la forza con cui l'aria $d_{aria} = 1,292 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ lo spinge in alto. Quale zavorra sarebbe necessaria per mantenere in equilibrio il pallone?

Ovviamente, la forza che spinge in alto il pallone è la forza netta dovuta alla differenza fra la spinta di Archimede subita dal pallone immerso completamente in aria e la forza peso. Visto che la densità dell'elio è minore di quella dell'aria, si comprende che la spinta S_a è sicuramente maggiore della forza peso F_P .

Bisogna fare attenzione alle unità di misura, trasformando le densità in unità del S.I. Ricordando che $1 \text{ g/cm}^3 = 1 \text{ Kg/m}^3$, si ha, con la solita formula:

$$F_{alto} = S_a = d_{aria} \cdot V_{pallone} \cdot 9,81 = 126,74 \text{ N}, \quad F_P = d_{He} \cdot V \cdot 9,81 = 17,46 \text{ N}$$

Essendo $S_a > F_P$, il pallone è spinto in alto da una forza netta di

$$F_{alto} = S_a - F_P = 109,3 \text{ N}$$

Se il pallone deve stare in equilibrio, è necessario contrastare questa forza verso l'alto con una zavorra verso il basso, la cui massa vale:

$$m_z = \frac{F_{Alto}}{9,81} = 11,12 \text{ Kg}$$

15

Un cilindro di rame di densità 8900 Kg/m^3 e massa $m = 5 \text{ Kg}$ è immerso completamente in acqua, sospeso ad un filo. Quale tensione τ esercita il filo in tale posizione? E se il cilindro fosse immerso per metà del suo volume?

La tensione del filo è uguale e contraria alla forza netta che in questo caso farebbe affondare il cilindro, visto che la sua densità è maggiore di quella del liquido in cui è immerso.

Ricondando che $V = \frac{m}{d}$, si ha che $V_{rame} = 0,00056m^3$, per cui si ha:

$$\tau = F_P - S_a = m_{rame} \cdot 9,81 - d_{acqua} \cdot V_{rame} \cdot 9,81 = 49,05 - 5,49 = 43,56N$$

Se poi il volume immerso è la metà, ripetendo il calcolo dimezzando il volume V_{rame} si ottiene

$$\tau = 49,05 - \frac{5,49}{2} = 46,3N$$