ESERCIZIARIO DI ELETTROSTATICA
(con soluzioni)

1) *Si hanno quattro sfere conduttrici identiche, una delle quali ha carica Q mentre le altre sono scariche. Potendo mettere a contatto le sfere solo due alla volta, come devi operare per distribuire la carica in parti eguali tra le sfere?*

2) *Una sfera conduttrice A possiede una carica Q; due sfere identiche alla prima (B,C) sono messe a contatto con la sfera A: prima B con A, poi C con A. La terza sfera viene tenuta sempre lontana dalle due che si mettono, volta a volta, in contatto. Determina la carica che si trova alla fine su ciascuna sfera.*

3) *Ripetendo le stesse operazioni descritte nell'esercizio precedente un gran numero di volte, quali cariche si troveranno alla fine sulle tre sfere?*

4) *Determina quanti elettroni occorrono per avere una carica Q = -1,00 C.*

5) *In un fulmine può scorrere una quantità di carica di 20 C. Quante cariche elementari partecipano alla scarica?*

6) *Calcola la carica totale di un nucleo di uranio, sapendo che questo è costituito da 92 protoni e 146 neutroni.*

7) *Su una sferetta conduttrice (per esempio il rame) di 1 cm di raggio, non si riesce sperimentalmente ad accumulare una carica superiore a un valore massimo dell'ordine di 10 nC. Dopo aver trovato i dati necessari nelle opportune tabelle, calcola quale frazione di elettroni in tale condizione, deve essere tolta alla sferetta nell'ipotesi che essa:*

a) sia piena;
b) sia cava con uno spessore 0,5 mm.

8) *Nella stessa situazione dell'esercizio precedente, facendo riferimento ai soli elettroni di conduzione, pensi che sia possibile rimuovere «soltanto» un elettrone di conduzione per ogni miliardo di elettroni di conduzione presenti? (Tieni presente che per ogni atomo di rame c'è un solo elettrone di conduzione.)*

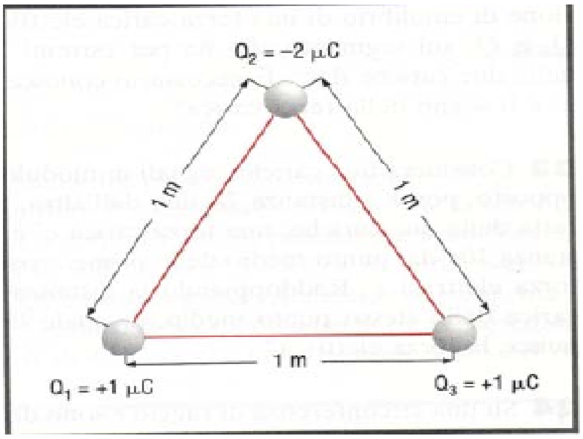
9) *Durante un temporale, le correnti d'aria provocano elettrizzazione per strofinio delle varie parti costituenti una nube. Supponi che a un certo istante la nube abbia una carica complessiva di 12 C, che la pioggia che cade trasporti via una carica di - 0,3 C/min e non ci siano altri scambi di carica con l'esterno della nube. Dopo 10 minuti si valuta che la base della nube abbia complessivamente una carica di -10 C. Che carica si trova nello stesso istante nella restante parte della nube?*

10) *Con quale forza si respingono due cariche, rispettivamente di 31,4 μC e 44,3 μC, poste nel vuoto alla distanza di 4,0 m una dall'altra?*

11) *A quale distanza una dall'altra bisogna porre nel vuoto due cariche ($Q_1 = 3 \times 10^{-5}$ C e $Q_2 = 4 \times 10^{-5}$ C) perché esse esercitino una sull'altra la forza di 200 N?*

12) *Due cariche elettriche, poste nel vuoto alla distanza di 10 cm una dall'altra, si respingono con una forza di 1,8 N. Quali sono i valori delle due cariche, se una è il doppio dell'altra?*

13) *Traccia con un righello i vettori forza che agiscono sulle tre cariche rappresentate nella figura seguente (dopo aver fissato una scala opportuna per la rappresentazione dei vettori).*



14) *Calcola la forza risultante che agisce sulla carica Q_2 dell'esercizio precedente.*

15) *A che distanza un protone potrebbe tenere sollevato un elettrone contro la forza di gravità?*

16) *Scambiando i ruoli delle due particelle dell'esercizio precedente si ottiene lo stesso risultato?*

17) *Nel modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno l'elettrone ruota attorno al nucleo alla distanza di circa 4 x 10-2 nm. Qual è la frequenza della rotazione?*

18) *Due sferette metalliche di massa 3,20 g sono appese, mediante due fili isolanti lunghi 20,0 cm, a uno stesso punto. Tenendo separate le sferette si pone una carica Q su una delle due che poi si lascia libera. La sferetta tocca l'altra e, a equilibrio raggiunto, i fili formano un angolo di 12,0°. Calcola il valore della carica Q.*

19) *Due cariche puntiformi eguali di carica $q = 5$ μC sono fissate agli estremi di un segmento AB di lunghezza pari a 12 cm. Una particella di massa $m = 9$ mg e carica $q' = -4$ μC è vincolata al piano perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio M. A che distanza da M deve ruotare la carica q' se la frequenza di rotazione è $f = 1$ kHz ?*

20) *Tre cariche eguali di valore 1,2 μC sono poste ai vertici di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano entrambi 5,0 cm. Calcola la forza totale che agisce sulla carica posta nel vertice dell'angolo retto.*

21) *Tre cariche di egual segno sono disposte ai vertici di un triangolo rettangolo. Mostra che se le cariche poste ai vertici degli angoli acuti sono proporzionali alle lunghezze dei cateti adiacenti agli stessi angoli, allora la forza sulla terza carica è diretta perpendicolarmente all'ipotenusa.*

22) *Due cariche $Q_1 = 4$ μC e $Q_2 = 16$ μC sono poste alla distanza di 9 cm l'una dall'altra. Determina la posizione di equilibrio di una terza carica elettrica posta tra Q_1 e Q_2 sul segmento che ha per estremi le posizioni delle due cariche date. È necessario conoscere il modulo e il segno della terza carica?*

23) *Considera due cariche, eguali in modulo e di segno opposto, poste a distanza 2a una dall'altra. Sulla stessa retta delle due cariche, una terza carica q' è posta a distanza 10a dal punto medio delle prime e risente di una forza elettrica F. Raddoppiandola distanza della terza carica dallo stesso punto medio, di quale fattore diminuisce la forza elettrica?*

24) *Su una circonferenza di raggio r sono disposte n cariche positive eguali e n cariche negative di modulo q eguale alle altre; le cariche sono equidistanti e alternate in segno. Calcola la forza che le cariche esercitano su un'ulteriore carica q posta al centro della circonferenza, per ogni n.*

25) *Una sfera metallica A, che ha una carica pari a 76,0 μC, viene messa a contatto con una sfera identica B inizialmente scarica, che poi viene posta alla distanza di 2,00 m. Una terza sfera C – scarica e identica alle precedenti – è messa a contatto con la prima e successivamente allontanata alla distanza di 1,50 m dalla prima. Al termine delle operazioni le tre sfere risultano allineate. Determina la forza che agisce su ciascuna sfera.*

26) *Due cariche $Q_1 = 2{,}0 \times 10^{-10}$ C e $Q_2 = - 4{,}0 \times 10^{-10}$ C si trovano alla distanza di $1{,}5 \times 10^{-5}$ m e sono immerse in acqua. Determina la forza agente su ciascuna carica.*

27) *La forza esercitata su una carica $Q_1 = 0{,}95 \times 10^{-15}$ C quando una seconda carica $Q_2 = 3{,}25 \times 10^{-14}$ C è posta a $0{,}84 \times 10^{-3}$ m di distanza, risulta di $16{,}4 \times 10^{-15}$ N. Qual è il valore della costante dielettrica relativa del mezzo in cui sono immerse le cariche?*

28) *Considera due cariche puntiformi $Q_1 = q$ e $Q_2 = - 4\,q$, poste a distanza d una dall'altra e immerse in un liquido di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3{,}5$. Tenendo conto solo della forza elettrostatica, esiste un punto di equilibrio per una terza carica Q_3 ?*

29) *In un ambiente vuoto e in assenza di gravità, due sferette conduttrici (A e B) poste a distanza a = 80 cm sono collegate con un sottile filo conduttore. Si avvicina un corpo carico negativamente alla sferetta A e si osserva (con un'opportuna strumentazione) un passaggio di cariche lungo il filo per un totale di 3,5 μC, per un tempo brevissimo, dopo il quale il filo viene staccato e il corpo carico allontanato. Con quale accelerazione inizia a muoversi la sferetta B, se la sua massa è di 60 g?*

30) *Due sferette uguali, poste a una distanza tra i centri molto maggiore del loro raggio e caricate rispettivamente con una carica q e –q, si attraggono con una forza F. Le sferette si comportano come cariche puntiformi: infatti, dimezzando la distanza tra i cerchi la forza aumenta di un fattore 4, finché la precedente condizione rimane verificata. Quando la distanza è confrontabile con il raggio delle sferette, la forza è maggiore o minore di quella di due cariche puntiformi eguali? Perché?*

31) *Avvicinando un corpo carico positivamente a una sfera di materiale isolante e scarica si osserva che un quarto della sua superficie si carica negativamente e che la carica totale negativa è pari a q = 12 pC. Quanto vale la carica positiva che si trova sul resto della superficie della sfera?*

32) *A un sottile cilindro isolante, la cui altezza h è molto maggiore del diametro di base d, viene avvicinata una carica positiva Q; il cilindro è sospeso orizzontalmente e la carica è posta lungo l'asse del cilindro a una distanza h/2 da una base. Il cilindro è allora attratto dalla carica con forza F. Ipotizzando che le cariche di polarizzazione siano localizzate solo sulle basi del cilindro, determina la carica di polarizzazione.*

33) *Due cariche del valore di 40,0 μC sono poste agli estremi di una molla orizzontale di materiale plastico, di costante elastica pari a 540 N/m, la cui lunghezza d'equilibrio è così di 75,0 cm. L'apparato è immerso quindi in una bacinella, che viene lentamente riempita con un olio isolante di costante dielettrica relativa pari a 2,20. Determinala nuova lunghezza della molla.*

34) *Due sferette conduttrici eguali, poste a contatto, vengono caricate con una carica complessiva $Q_0 > 0$ e successivamente separate finché alla distanza d = 30,0 cm la forza necessaria per mantenerle ferme (nel vuoto) è in modulo $F_0 = 5,30 \times 10^{-2}$ N. Supponi che le sferette possano essere trattate con cariche puntiformi.*

a) quanto vale la carica Q_0?

b) Mostra che, spostando da una sferetta all'altra una qualunque frazione della carica Q presente su ciascuna di esse, la forza necessaria a tenere ferme le sfere in ogni caso diminuisce.

c) Mantenendo eguale a Q_0 la carica totale sulle sferette, è possibile che la forza necessaria per mantenerle ferme abbia intensità maggiore di F_0?

35) *Una goccia di pioggia (di massa m = 1,8 mg) durante un temporale acquista una carica di -0,45 nC. A un certo istante, la goccia si divide in due parti, l'una di raggio doppio rispetto all'altra. Fai l'ipotesi che la carica si divida in modo proporzionale al raggio e determina:*

a) la carica delle due parti;

b) la forza elettrica che agisce su ciascuna delle due parti quando si trovano alla distanza di 0,50 cm una dall'altra;

c) l'accelerazione (in modulo, direzione e verso) su ciascuna delle due parti alla distanza data sopra, nell'ipotesi che si trovino alla stessa altezza del suolo.

***36)** Una barretta isolante di lunghezza 2a, avente ai suoi estremi due cariche puntiformi e eguali Q, è posta su un piano orizzontale. La sbarretta può ruotare attorno a un asse verticale passante per il suo punto centrale. Sullo stesso piano, da parti opposte rispetto alla sbarretta, sono collocate altre due cariche isolate, di valore – Q, in modo da formare un triangolo equilatero con ciascuna delle precedenti, come mostrato nella figura.*

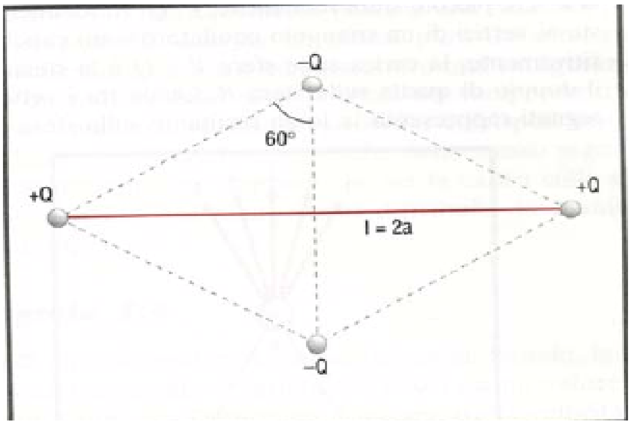
a) Determina le forze necessarie (come reazioni vincolari) per mantenere le cariche nella posizione data.

b) Determina il momento meccanico che serve a mantenere la sbarretta nella posizione data.

Le due cariche negative vengono ora fissate nelle rispettive posizioni

c) Se la sbarretta è leggermente ruotata e poi lasciata libera, in quale posizione di equilibrio tende a disporsi?

d) Raggiunta questa posizione di equilibrio, che forza occorre per mantenere ferma ciascuna delle cariche isolate?



***37)** Infinite cariche, tutte eguali in modulo a 1 nC, ma alternate in segno (…,+q, - q, +q, - q,…), sono fissate lungo una retta a distanza d = 5 cm una dall'altra.*

a) Prova a stimare, con l'aiuto di una calcolatrice, la forza necessaria a mantenere ferma un' ulteriore carica q (eguale alle altre), nel punto medio tra due cariche consecutive.

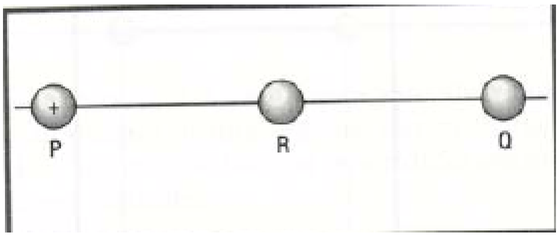
b) Se si volesse verificare sperimentalmente la stima fatta entro lo 0,5%, quante cariche sarebbe sufficiente considerare?

(Suggerimento: riporta in un grafico, in funzione di n, i valori della forza che si ottiene considerando solo le n cariche più vicine da ogni lato)

Quesiti

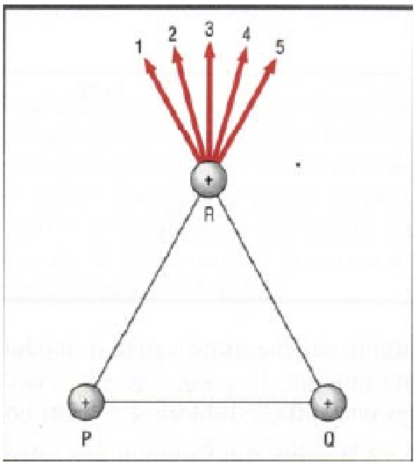
Scegli la risposta corretta.

38) Si hanno tre piccole sfere metalliche *P*, *Q*, *R*, identiche. La sfera *P* è caricata positivamente, la sfera *Q* viene posta a contatto con la precedente e poi fissata alla distanza di 0,20 m da *P*. La sfera *R*, dopo aver toccato la sfera *Q*, è posta a metà sulla retta congiungente le altre due. Quale sarà il rapporto tra la forza esercitata sulla sfera *R* della sfera *P* e la forza esercitata su *R* da *Q*?



A) 4.
B) 2.
C) 1.
D) ½.
E) ¼.

39) Tre piccole sfere metalliche, *P*, *Q*, *R*, identiche, poste ai vertici di un triangolo equilatero sono cariche positivamente; la carica sulle sfere *P* e *Q* è la stessa ed è il doppio di quella sulla sfera *R*. Quale tra i vettori disegnati rappresenta la forza risultante sulla sfera *R*?

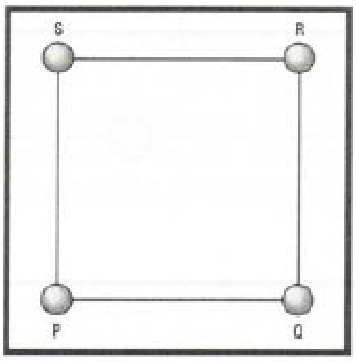


A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

40) Ai vertici *P*, *Q*, *R*, *S* del quadrato sono collocate quattro sfere metalliche cariche, identiche. La tabella sottostante riporta tre possibili distribuzioni della carica (in unità arbitrarie) sulle sfere.

	P	*Q*	*R*	*S*
a	−2	+1	+1	+1
b	+2	−1	−2	−1
c	+1	+2	−1	+2

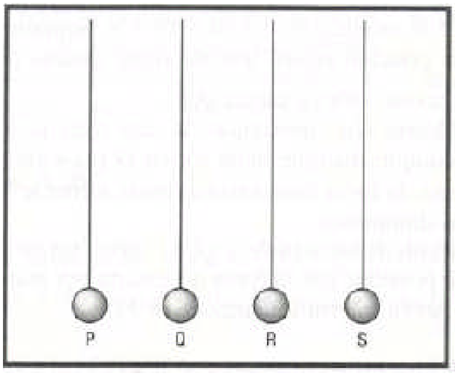
In quale caso la risultante delle forze elettrostatiche sulla sfera posta in *R* è nulla?



A) Solo a.
B) Solo b.
C) Solo c.
D) In tutti i tre casi.
E) In nessun caso.

41) Quattro sfere metalliche identiche *P*, *Q*, *R*, *S* sono sospese a fili isolanti (vedi figura che segue). Vengono avvicinare a due a due senza contatto e si osserva che *P* e *R* si respingono, *Q* e *R* si attraggono, mentre tra *Q* e *S* non si manifesta alcuna interazione elettrostatica. Quale stato elettrico delle sfere giustifica quanto è stato osservato?

A) *P* positivo; *Q* negativo; *R* positivo; *S* negativo.
B) *P* positivo; *Q* positivo; *R* positivo; *S* neutro.
C) *P* positivo; *Q* neutro; *R* positivo; *S* positivo.
D) *P* positivo; *Q* neutro; *R* positivo; *S* negativo.
E) *P* positivo; *Q* neutro; *R* positivo; *S* neutro.



42) Il limite della funzione $F(r)$, che esprime matematicamente l'andamento della forza coulumbiana tra due cariche Q_0 e Q_1, collocate nel vuoto a distanza r, per $r \to +\infty$ *è:*

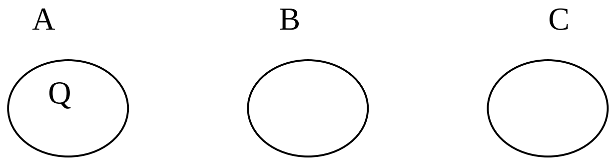
A) 0.
B) 1.
C) $k_0\ Q_0\ Q_1$.
D) $+\infty$.
E) Non esiste.

Soluzioni

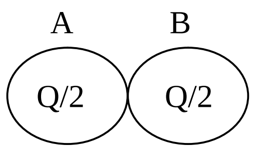
1)

A è la sfera carica mentre B,C e D sono scariche. La risposta è:
A con B; A con C e B con D
Ad esempio si abbia A carica con un valore simbolico di +8, mettendola in contatto con B si ha che A e B ora avranno carica +4. Ora mettiamo in contatto A con C e B con D ed avremo cos' tutte e quattro le sfere cariche con valore +2.

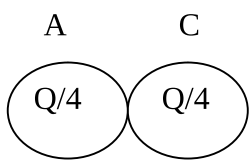
2)



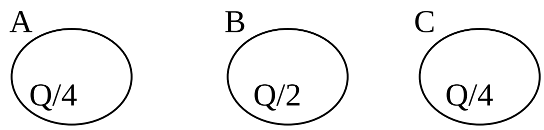
Mettiamo in contatto A e B



ed ora A con C



ed alle fine abbiamo quindi la seguente situazione



3)

La situazione finale è ovviamente di equipartizione: $Q_A = Q_B = Q_C = Q/3$

4)

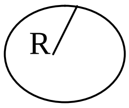
Q = - 1.00 C
Il Coulomb è definito come quella carica formata da un aggregato di $6 \cdot 10^{18}$ cariche elementari ossia di elettroni (con due cifre decimale è $6.25 \cdot 10^{18}$).

5)
$N = 20 \cdot 6.25 \cdot 10^{18} = 125 \cdot 10^{18}$ elettroni $= 1.2 \cdot 10^{20}$ elettroni

6)

Carica nucleo Uranio = n° cariche del nucleo/n° di cariche in 1 C = $92/(6.25 \cdot 10^{8}) = 1.47 \cdot 10^{-17}$ C

7)

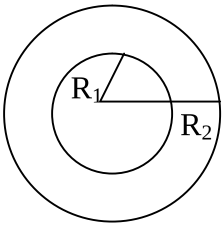


$R = 0.01$ m $\quad \rho = 8960$ kg/m^3 $\quad C_{max} = 10$ nC

a)

Sfera piena: occorre determinare il n° di elettroni presenti in essa
Determiniamo dapprima il n° di atomi presenti nella sfera:
n° atomi = massa della sfera / massa di un atomo = $\rho V/m_{Cu} = 8960(4/3)\,\pi\,(0.01^3 / (64\cdot1.66\cdot10^{-27}) =$
$= 3.53\cdot10^{23}$ atomi
Ora considerando che in un atomo di rame di sono 29 elettroni (onfatti il suo numero atomico è 29) si ha n° elettroni nella sfera di rame = $3.53\cdot10^{23}\cdot29 = 102\cdot10^{23}$ elettroni
In 10 n ci sono $10\cdot10^{-9}\cdot6.25\cdot10^{8} = 62.5\cdot10^{9}$ elettroni
Dunque la frazione richiesta è $f = 62.5\cdot10^{9}/(102\cdot10^{3}) = 6\cdot10^{-15}$

b)



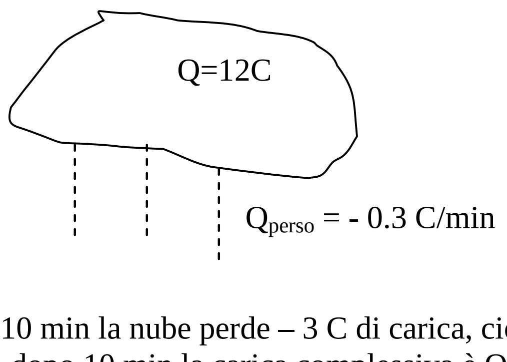
$V = (4/3)\,\pi\,R_1^3 - (4/3)\,\pi\,R_2^3 = (4/3)\,\pi\,(0.01)^3 - (4/3)\,\pi\,(0.0095)^3$
$= 42\cdot10^{-7} - 36\cdot10^{-7} = 6\cdot10^{-7}$ m^3

$m = \rho V = 8960\cdot6\cdot10^{-7} = 0.00537$ kg $= 5.38$ g
n° atomi $= 0.005376/(64\cdot1.66\cdot10^{-27}) = 51\cdot10^{21}$
n° elettroni $= 51\cdot10^{21}\cdot29 = 1480\cdot10^{21}$ elettroni
$f = 62.5\cdot10^{9}/(1480\cdot10^{21}) = 4\cdot10^{-14}$

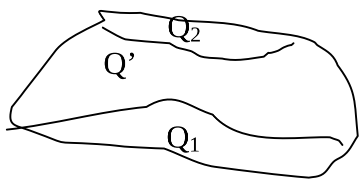
8)

n° elettroni di conduzione = n° atomi = $3\cdot10^{23}$
Rimuovendo “soltanto” un elettrone per ogni 10^9 elettroni si avrebbe un numero di cariche di
$n = 3.5\cdot10^{23}/10^{9} = 3.5\cdot10^{14}$ cariche
mentr il n° max di cariche è $62\cdot10^{9}$ quindi la risposta è negativa.

9)

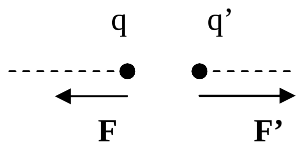


Dopo 10 min: $Q_1 = -10C$
$Q' = Q_1 + Q_2$



Dopo 10 min la nube perde – 3 C di carica, ciò vuol direche resta con una carica sbilanciata di +3 C, quindi dopo 10 min la carica complessiva è $Q' = 3 + 12 = 15$ C
$Q_2 = Q' - Q_1 = 15 - (-10) = 25$ C

10)



In modulo le due forze sono uguali: $F = F'$

La legge di Coulomb è:

$F = k\, q\, q'/R^2 = 9\cdot 10^9\ 31.4\cdot 10^{-6}\cdot 44.3\cdot 10^{-6} / 4^2 = 0.78$ N

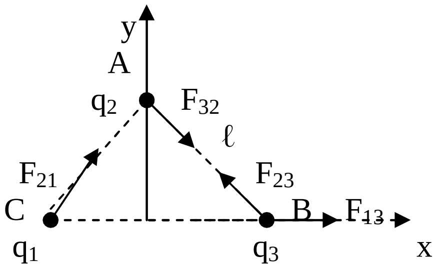
11)

$R = (9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-5}\cdot 4\cdot 10^{-5}/200)^{1/2} = 0.23$ m

12)

$F = k\, q\cdot 2q / R^2$ da cui $q = (1.8\cdot 0.1^2/2\cdot 9\cdot 10^9)^{1/2} = 10^{-6}$ C

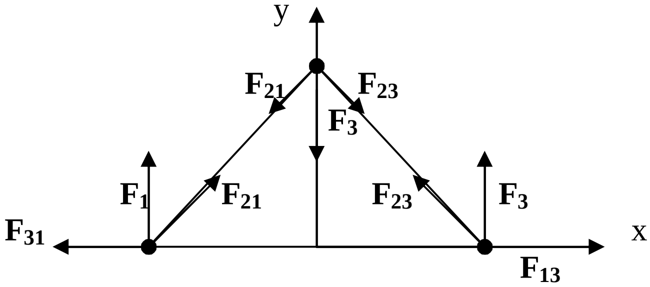
13)



Il triangolo è equilatero: angoli di 60°
Su ogni carica agiscono due forze

Ribadiamo che i pedici indicano i numeri delle due cariche che danno origine alla forza di Coulomb, ad es. F_{21} significa: la forza che la carica 1 sente a causa della carica 2, quindi il secondo numero indica il punto di applicazione del vettore **F**.

$\mathbf{F_{13}} = k\, q_1 q_2/ \ell^2 = 9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-6} / 1^2 = 9\cdot 10^{-3}\ \mathbf{i}$ N
$\mathbf{F_{23}} = k\, q_2 q_3 / \ell^2\ \mathbf{u_{AB}} = 9\cdot 10^9\ (-2\cdot 10^{-16})\cdot 10^{-6}/1^2 = 18\cdot 10^{-3}\ \mathbf{u_{AB}}$ N
Adesso occorre valutare il versore $\mathbf{u_{AB}}$
$\mathbf{u_{AB}} = \mathbf{AB}/AB = ((AB)_x\ \mathbf{i} + (AB)_y\ \mathbf{j}) / 1 = - 0.5\ \mathbf{i} + (1\cdot \sin 60°)\ \mathbf{j} = - 0.5\ \mathbf{i} + 0.866\ \mathbf{j}$
$\mathbf{F_{23}} = - 9\cdot 10^{-3}\ \mathbf{i} + 15.6\cdot 10^{-3}\ \mathbf{j}$
$F_{23} = ((9\cdot 10^{-3})^2 + (15.6\cdot 10^{-3})^2)^{1/2} = 18\cdot 10^{-3}$ N
Per simmetria è $F_{23} = F_{32} = F_{12} = F_{21}$
$F_2 = (F_{32}^2 + F_{12}^2 + 2F_{32}F_{12}\cdot \cos\theta)^{1/2} =$
$((18\cdot 10^{-3})^2 + (18\cdot 10^{-3})^2 + 2\cdot 18\cdot 10^{-3}\cdot 18\cdot 10^{-3}\cdot \cos 60°))^{1/2} = 31\cdot 10^{-3}$ N
ed è diretta ovviamente lungo y.
Facciamo uno schizzo conclusivo:

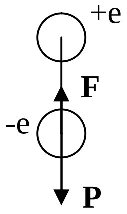


Quindi concludendo si può affermare che le forze risultanti su q_1 e q_3 sono dirette lungo y.

14)

Come già visto, la forza risultante su q_2 è $31\cdot10^{-3}$ N

15)



$F = k\,e^2/r^2 = P \qquad P = m_e\,g = 9.11\cdot10^{-31}\cdot 9.8 = 89.3\cdot10^{-31}$ N

$r = (k\,e^2/P)^{1/2} = (9\cdot10^9\,(1.6\cdot10^{-19})^2/\,(89.3\cdot10^{-31}))^{1/2} = 5.1$ m

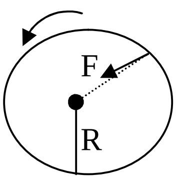
16)

Ovviamente NO.

Ora i dati sono: $P = m_p\,g = 1.67\cdot10^{-27}\cdot 9.8 = 16.37\cdot10^{-27}$ N

$r = (9\cdot10^9\,(1.6\cdot10^{-19})^2\,/\,(16.37\cdot10^{-27}))^{1/2} = 0.12$ m

17)

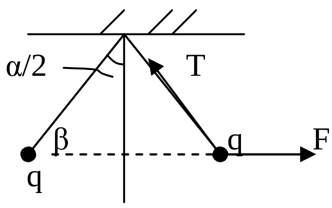


$F = m_e\,\omega^2\,R = k\,q_1q_2\,/\,R^2 \qquad (q_1=q_2=e)$

$\omega = (ke^2/m_e\,R^3)^{1/2} = \ldots = 6.3\cdot10^{16}$ rad/s

$\nu = \omega/2\,\pi = 10^{16}$ Hz

18)



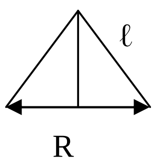
Dopo il contatto le cariche sulle palline sono ambedue di Q/2 poniamo per semplicità di scrittura $Q/2 \equiv q$

All'equilibrio F deve controbilanciare $T_x = T\cos\beta$

$= T\cos(90° - \alpha/2)$

$= T\sin\alpha/2$

$= T\sin 6° = 0.1\,T$



$R/2 = \ell\sin\alpha/2$

$R = 2\cdot0.2\cdot\sin6° = 4.2$ cm

$F = T_x \qquad F = k\,q^2/R^2$

$T_x = 0.1T = 0.1\,(F^2+P^2)^{1/2} = 0.1(k^2q^2q^2/R^4 + m^2g^2)^{1/2} = 0.1\,(\ldots.)^{1/2} = k\,q^2/R^2$

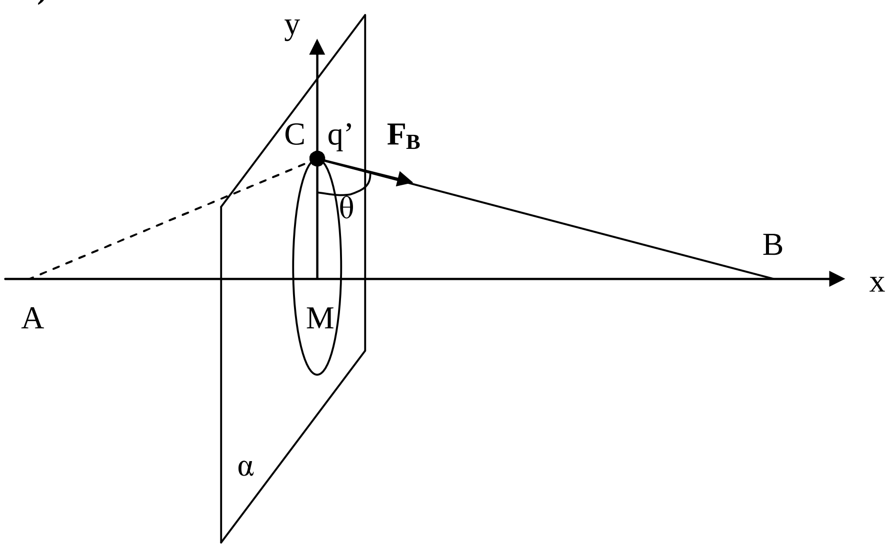
quadrando si ha: $k^2\,q^4/r^4 + m^2g^2 = (k^2/0.1^2)\,(q^4/R^4)$

$k^2q^4 + R^4m^2g^2 = 100k^2q^4$

$q = (R^2mg\,/\,(99)^{1/2}\,k\,)^{1/2}$) $(0.042^2\cdot3.2\cdot10^{-3}\cdot9.8/((99)^{1/2}\cdot9\cdot10^9)^{1/2} = 2.5\cdot10^{-8}$ C

$Q = 2q = 50$ nC

19)



Essendo la situazione simmetrica, analizziamola solo considerando il lato destro: la componente della forza di attrazione elettrostatica (forza di Coulomb) fra q e q' lungo y (sul piano α) è metà (l'altra metà è data dal contributo dell'altra forza F_A) la forza centripeta che mantiene il moto circolare, pertanto possiamo scrivere:

$F_c = 2\, F_B \cos\theta = m\,\omega^2 R$

Ora si noti che $R = CB \cos\theta$ cioè $\cos\theta = R/CB$ e che $CB = (R^2 + MB^2)^{1/2}$

per cui si ha $2k\,(q\,q' / CB^2) \cos\theta = m\,\omega^2 R$

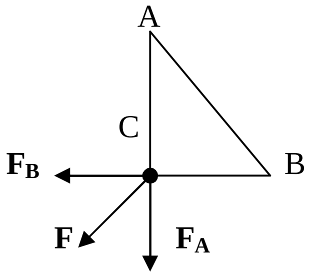
$2kqq'/(R^2+MB^2)\,(R/CB) = m\,\omega^2 R$

$2k\,qq' / m\,\omega^2 = (R^2+MB^2)^{3/2}$

Calcoliamo il primo membro: $2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{-6}/(9\cdot 10^{-6}\,(6.28\cdot 10^3)^2) = 10^{-3}$ quindi:

$(10^{-3})^{2/3} = ((R^2 + 0.06^2)^{3/2})^{2/3}$ da cui $R^2 + 0.0036 = 0.01$ infine $R = 0.08$ m

20)



$q_A = q_B = q_C = q = 1.2\ \mu C$

$AC = CB = 5$ cm

$F_A = k\,qq'/AC^2 = 9\cdot 10^9\,(1.2\cdot 10^{-6})^2/0.05^2 = 5.18$ N

$F = \sqrt{2}\cdot 5.18 = 7.3$ N

(si ricordi che la diagonale di un quadrato è $\sqrt{2}\ \ell$)

21)

Rifacendoci al disegno precedente dobbiamo ora far vedere che risulta $\mathbf{F}\cdot\mathbf{AB} = 0$

ossia $F_x(AB)_x + F_y(AB)_y = 0$ essendo $(AB)_x = -CB$ e $(AB)_y = AC$ si ha

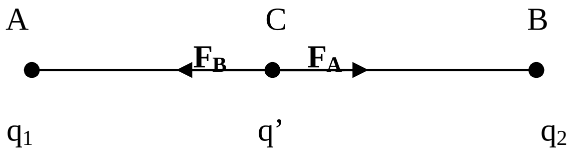
$F_x\,(-CB) + F_y\,(AC) = 0$ cioè dobbiamo far vedere che $F_x\,(CB) = F_y\,(CA)$ mettiamo le espressioni delle forze:

$k\,(q_C q_B / (CB)^2)\,(CB) = k\,(q_C\, q_A / (AC)^2)\,(AC)$ $q_A/AC = q_B/CB$

che si può anche scrivere così

$q_B : CB = q_A : AC$ c. v. d.

22)



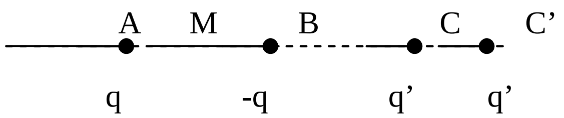
All'equilibrio deve essere $F_A = F_B$

$k\,q'\,q_1 / (AC)^2 = k\,q'\,q_2 / (CB)^2$ $\quad q_2/q_1 = (CB)^2/(AC)^2$ ma $AC = AB - CB$ dunque
$16/4 = (CB)^2 / ((AB)^2 + (CB)^2 – 2(AB)(CB))$ ora poniamo $CB = x$ si ha
$x^2 = 4(0.09^2 + 4x^2 – 8\cdot 0.09\,x$ cioè $3x^2 – 0.72\,x + 0.0324 = 0$ da cui

$$x = \begin{cases} 0.18 \text{ m (non accettabile)} \\ 0.06 \text{ m} \end{cases}$$

CB = 6 cm e AC = 3 cm (il segno ed il valore della carica sono ininfluenti).

23)

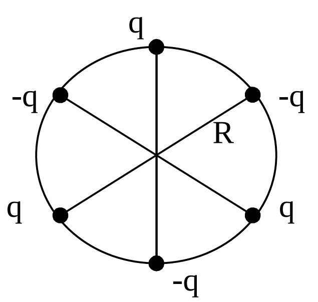


AB = 2a
MC = 10 a
MC' = 20 a

$F_1 = -k\,qq'/(BC)^2 + k\,qq'/(AC)^2 = A\,(-1/(9a)^2 + 1/(11a)^2) = -\,0.004\,A$ $\quad (A \equiv kqq')$
$F_2 = -k\,qq'/(BC')^2 + k\,qq'/(AC')^2 = A\,(-1/(19a)^2 + 1/(21a)^2) = -\,0.005\,A$

$F_1/F_2 = 8$

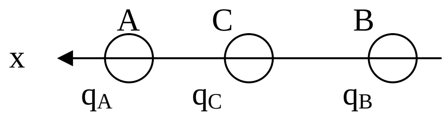
24)



Per $n = 1$ è $F = k\,q^2/R^2$
Per $n > 1$ è $F = 0$
perché al cento contribuiscono sempre due forze uguali ed opposte per ragioni di simmetria.

25)

Poiché ogni volta che una sfera carica è in contatto con un'altra identica la carica si equipartisce si ha la seguente situazione finale:

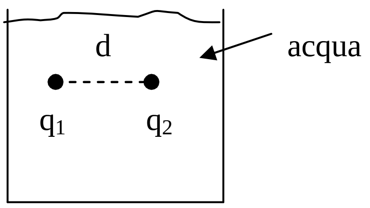


$q_A = q_C = 19\ \mu C$
$q_B = 38\ \mu C$
$AB = 2\ m$
$AC = 1.5\ m$

$F_A = F_{CA} + F_{BA} = k\, q_A^2/(AC)^2 + k\, q_A q_B\, /\, (AB)^2 = \ldots = 3.07\ N$
$F_C = F_{BC} - F_{AC} = k\, q_B q_C/(CB)^2 - k\, q_A q_C/(AC)^2 = \ldots = 24.5\ N$
$F_B = F_{AB} + F_{CB} = \ldots = -\ 27.6\ N$

26)

$(\varepsilon_r)_{acqua} = 80$



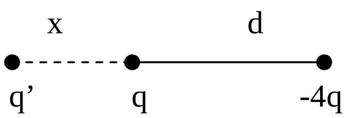
$F = (1/4\ \pi\varepsilon_0)\ (1/\varepsilon_r)\ q_1 q_2/d^2 = \ldots = 4.0 \cdot 10^{-2}\ N$

Le forze colombiane fra le cariche in acqua si riducono di un fattore (1/80) rispetto al vuoto.

27)

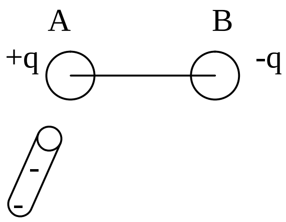
$F = (k/\varepsilon_r)\ q_1 q_2/d^2$ da cui $\varepsilon_r = (k/F)\ q_1 q_2/d^2 = \ldots = 2.4$

28)



$(k/\varepsilon_r)\ qq'/x^2 = -\ (k/\varepsilon_r)\ q'(-4q)/(x+d)^2$
da cui $(x+d)^2 = 4x^2$ che risulta vera per $x = d$
D'altro canto q' non può stare sul lato destro di B
in quanto si avrebbe $(k/\varepsilon_r)\ qq'/(x+d)^2 = -\ (k/\varepsilon_r)\ q'(-4q)/x^2$
cioè $3x^2 + 8dx + 4d^2 = 0$ con sol. $x_1=-0.66d$ e $x_2=-6d$
che sono ambedue non accettabili in quanto x non può essere negativo.

29)



Si ha $k\ qq'/d^2 = ma$ $\quad a = (1/m)\ k\ qq'/d^2$
$a = (9 \cdot 10^9/(60 \cdot 10^{-3}))\ (\ (3.5 \cdot 10^{-6})^2/0.8^2) = 2.9\ m/s^2$

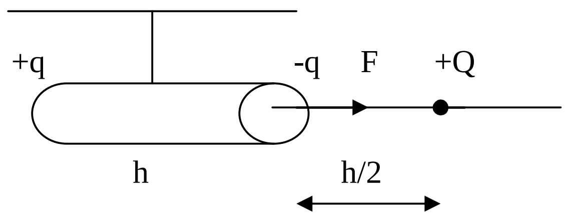
30)

Quando d>>R la forza di interazione fra le sfere è semplicemente la forza di Coulomb
$F = k\, q(-q)/R$ ma quando $d \approx R$ allora a causa della induzione elettrostatica le cariche si dispongono sulla calotta sferica in modo che avvenga uno sbilanciamento di cariche che si dispongono in modo che sulla faccia destra della prima sfera ci siano cariche di segno contrario a quelle della faccia sinistra della seconda sfera in tal modo aumentando la forza di interazione.

31)

Se la carica indotta è (-q) dovendo essere la carica totale nulla, la carica positiva sarà semplicemente +q.

32)

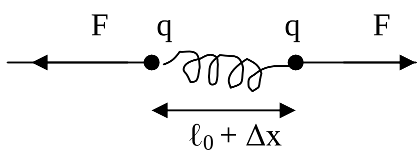


$F = k\, Q(-q)/(h/2)^2 + k\, qQ/(h+h/2)^2 =$

$= \ldots = - 32k\, qQ/9h^2$ da cui
$1/q = - (32/9)\, k\, qQ/h^2$ ossia

$q = 9Fh^2/32kQ$

33)



$\ell \equiv \ell_0 + \Delta x = 75.0$ cm
$k_m = 540$ N/m
$q = 40.0\ \mu C$

Occorre determinare il valore della lunghezza della molla (a riposo) ossia ℓ_0

La forza totale che produce l'allungamento della molla è 2F per cui possiamo scrivere (in modulo) : $2F = k_m\, \Delta x$ essendo F la forza di interazione coulombiana abbiamo
$2\, k\, q^2/(\ell_0 + \Delta x)^2 = k_m\, \Delta x$ $\quad 2\, k\, q^2/k_m = \ell^2\, (\ell - \ell_0)$
calcoliamo numericamente il primo membro: $2 \cdot 9 \cdot 10^9\, (40 \cdot 10^{-6})^2/540 = 0.053$
$0.053 = \ell^3 - \ell\, \ell_0$ da cui
$$\ell_0 = (\ell^3 - 0.053) / \ell^2 = (0.75^3 - 0.053) / 0.75^2 = 66 \text{ cm}$$

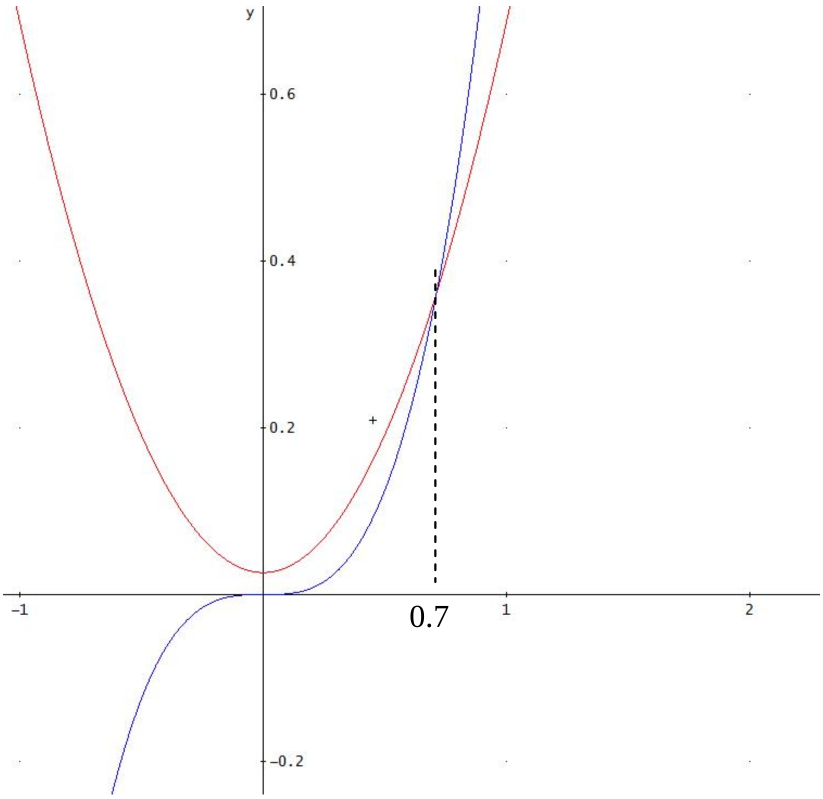
In olio quello che cambia è la forza colombiana che viene ridotta di un fattore $1/\varepsilon_r$:
$(1/\varepsilon_r)\, 2\, k\, q^2/(\ell_0 + \Delta x')^2 = k_m\, \Delta x'$ $\quad 0.053/2.2 = \ell'^3 - \ell_0\, \ell'^2$ vien fuori una semplice equazione di terzo grado: $\ell'^3 - 0.66\, \ell'^2 - 0.0265 = 0$ la cui soluzione è (1)
$$\ell' = 72 \text{ cm}$$
Quindi in olio l'allungamento della molla passa da 75 cm a 72 cm a causa dell'indebolimento della forza di Coulomb fra le cariche.

N.B.

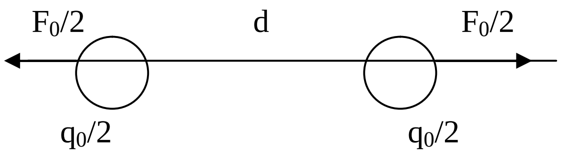
Si noti come appendice che se si considera come distanza fra le cariche non ℓ ma ℓ_0 scrivendo così $2\,kq^2/\,\ell_0^2 = k_m\,\Delta x$ si sarebbe commesso un errore cospicuo trovando per la lunghezza a riposo della molla non più 66 ma 61 cm (ed in olio 68 cm invece di 72), la distanza corretta da inserire nell'espressione della forza elettrostatica è quindi quella finale ossia quella che è presente all'equilibrio e che in effetti provoca l'allungamento dato.

(1)

Per la soluzione di un'equazione di terzo grado occorre ricorrere al metodo grafico (quello analitico lo si studia nei corsi Universitari), basta scrivere l'eq. in questo modo: $x^3 = 0.66x^2+0.0265$ e costruirsi a mano in grafico delle due curve, l'ascissa del punto di intersezione è las soluzione cercata (se esiste). In questo caso il compito è piuttosto banale in quanto le due curve sono di quelle il cui grafico è immediato e alla fine risulta che il punto di intersezione è circa 0.7 (cioè 70 cm).



34)



a) $F = F_0/2 = k\,(q_0/2)\,(q_0/2) / d^2$ $\quad q_0 = 2\,((F_0/2)\,d^2/k)^{1/2} = \ldots = 1.46\ \mu$

b) Supponiamo di trasferire una certa quantità di carica da A e portarla a B, avremo q_0/m su A e q_0/n su B pertanto la forza sarà: $F = 2k\,(q_0/m)\,(q_0/n) / d^2$ cioè F_0 dipende dal prodotto $(1/m)(1/n)$ con la condizione che $(1/m) + (1/n) = 1$, riscriviamo F_0 in questo modo

$F_0 = 2k\ mq_0nq_0 / d^2$

Ora il problema è di trovare i due numeri m ed n tali che la loro somma sia uno e che il loro prodotto sia massimo

$m + n = 1 \qquad m = 1 - n \qquad \ldots.$

$m\,n = p \qquad (1\text{-}n)\,n = p \qquad n^2 - n + p = 0 \qquad n = 1 \pm (1\text{-}4p)^{1/2} / 2$

La condizione di realtà del radicando impone che sia $1 - 4p \geq 0$ ossia $p \leq ¼$

quindi $p_{max} = ¼$ nel qual caso di ha $m = ½$ e $n = ½$

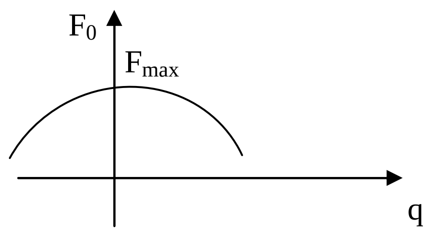
Quindi il prodotto massimo si ha per $m = n = ½$ in tutti gli altri casi p è minore e di conseguenza F_0 minore

$F_{0,max} = 2k\,(q_0/2)\,(q_0/2) / d^2$

Oppure indicando con q la quantità di carica trasferita si ha:

$F_0 = k\,(q_0/2 + q)\,(q_0/2 - q) / d^2 = (k/d^2)\,(q_0^2/4 - q^2) = A - Bq^2$ (con $A = 0.053$ e $B = 10^{11}$)

Riportiamolo in grafico



Come si vede F_0 assume il valore massimo per $q = 0$
Quindi qualunque spostamento di carica fa diminuire F_0.

c) Facciamo un piccolo cambio di simboli ed indichiamo ora con Q_0 la carica totale sulle sfere. Ora la condizione da imporre è diversa: la carica totale resta q_0 anche aggiungendo alle due sfere due cariche opposte q e – q

Ora può essere $q' < 0$ oppure $q' > Q_0/2$ $\qquad$ per semplicità indichiamo $Q_0/2 \equiv Q$

$F' = (k/d^2)\,(Q^2 - q'^2)$ con $q'^2 > Q^2$

quindi F sarà negativa, ma a noi interessa trovare il modulo, Vogliamo che sia $F' > F$

$(k/d^2)\,(Q^2 - q'^2) > (k/d^2)\,(Q^2 - q^2)$

$|Q^2 - q'^2| > Q^2 - q^2$

$Q^2 - q'^2 > Q^2 - q^2$ $\quad$ se $Q^2 - q'^2 > 0$ $\quad$ non è il nostro caso

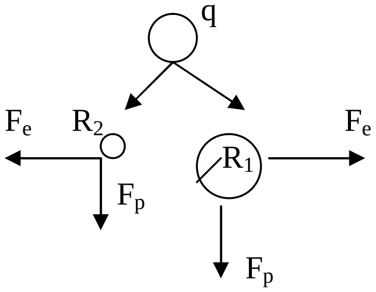
$-Q^2 + q'^2 > Q^2 - q^2$ $\quad$ se $Q^2 - q'^2 < 0$ $\quad$ è il nostro caso

$q = 0$ infatti vogliamo $F' > F_{max}\,(q=0)$

quindi $q'^2 > 2Q^2$

$q' > \sqrt{2}\,Q = Q_0/\sqrt{2}$

35)

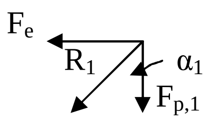


$R_1 = 2R_2$

a) $q_1 = 2q_2$ …….. $q_1 = -0.30$ nC
$q_1+q_2 = q$ $3q_2 = q$ $q_2 = -0.15$ C

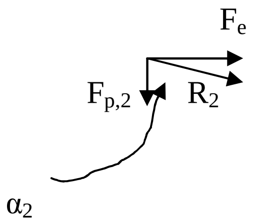
b) $d = 0.50$ cm $F_e = k\, q_1q_2/d^2 = \ldots = 1.6\cdot10^{-5}$ N

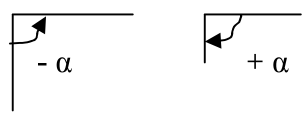
c) $\mathbf{F_1} = \mathbf{F_{p,1}} + \mathbf{F_e} = m_1g\,\mathbf{j} + 1.6\cdot10^{-5}\,\mathbf{i} = 1.6\cdot10^{-5}\,\mathbf{i} + 15.7\cdot10^{-6}\,\mathbf{j}$
$F_1 = ((1.6\cdot10^{-5})^2 + (15.7\cdot10^{-6})^2)^{1/2} = 22.56\cdot10^{-6}$ N
$\mathbf{F_2} = \mathbf{F_{p,2}} + \mathbf{F_e} = m_2g\,\mathbf{j} - 1.6\cdot10^{-5}\,\mathbf{i} = -1.6\cdot10^{-5}\,\mathbf{i} + 1.96\cdot10^{-6}\,\mathbf{j}$
$F_2 = ((-1.6\cdot10^{-5}) + (1.96\cdot10^{-6})^2)^{1/2} = 16.32\cdot10^{-6}$ N
Pertanto le accelerazioni sono: $a_1 = F_1/m_1$ e $a_2 = F_2/m_2$ e quindi dobbiamo calcolare le masse.
$m = m_1+m_2 = \rho\,(4/3)\,\pi\,R_1^3 + \rho\,(4/3)\,\pi\,R_2^3$
$m / \rho\,(4/3)\,\pi = (2R_2)^3 + R_2^3$
$R_2 = ((1.8\cdot10^{-6})/(9\cdot10^3(4/3)\,\pi))^{1/3} = 0.363\cdot10^{-3}$ m
$R_1 = 0.726\cdot10^{-3}$ m
$m_1 = \rho\,(4/3)\,\pi\,R_1^3 = \ldots = 1.6$ mg
$m_2 = \rho\,(4/3)\,\pi\,R_2^3 = \ldots = 0.2$ mg
$a_1 = F_1/m_1 = 22.56\cdot10^{-6}/(1.6\cdot10^{-6}) = 14\ m/s^2$
$a_2 = F_2/m_2 = 16.32\cdot10^{-6}/(0.2\cdot10^{-6}) = 81\ m/s^2$
Le direzione e verso delle accelerazioni sono quelle felle forze:



$\alpha_1 = \arctan F_{1,x}/F_{1,y} = \arctan\,(16.2\cdot10^{-6})/(15.7\cdot10^{-6}) = 46°$

$\alpha_2 = \arctan F_{2,x}/F_{2,y} = \arctan\,(-16.2\cdot10^{-6})/(1.96\cdot10^{-6}) = -83°$





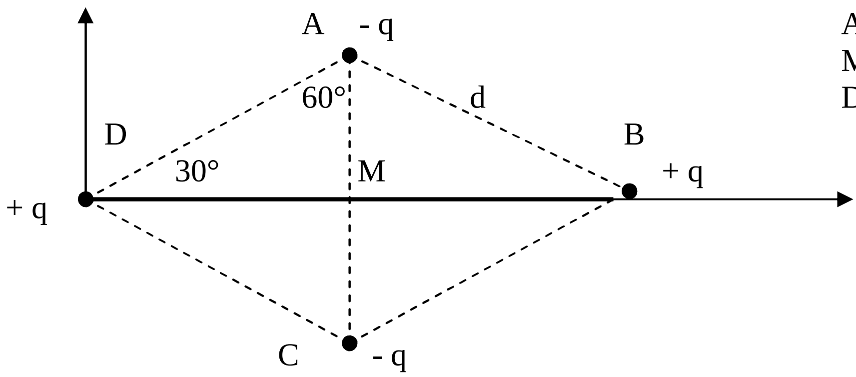
36)

ABC e ADC sono equilateri

AB = BC = AC = d

MB = a = d sin 60°

DB = 2a



a)

La risultante delle forze su D è $\mathbf{F_D} = \mathbf{F_{AD}} + \mathbf{F_{BD}} + \mathbf{F_{CD}}$

La componente lungo x di F_D è “assorbita” dalla rigidità della sbarretta.

Calcoliamo la componente lungo y:

$F_{D,y} = F_{AD,y} + F_{CD,y} = - k\,(q^2/d^2) \sin 30° + k\,(q^2/d^2) \sin 30° = 0$

Dunque su D, e per simmetria su B, non occorrono forze vincolari.

Vediamo cosa succede al punto A (e per simmetria al punto C):

$F_A = F_{BA} + F_{CA} + F_{DA} = 0$

$\mathbf{F_{BA}} = - k\,(q^2/d^2) \sin 60°\, \mathbf{i} + k\,(q^2/d^2) \cos 60°\, \mathbf{j}$

$\mathbf{F_{DA}} = k\,(q^2/d^2) \sin 60°\, \mathbf{i} + k\,(q^2/d^2) \cos 60°\, \mathbf{j}$

$\mathbf{F_{BA}} + \mathbf{F_{DA}} = 2k\,(q^2/d^2) \cos 60°\, \mathbf{j}$

$\mathbf{F_{CA}} = - k(q^2/d^2)\, \mathbf{j}$

$\mathbf{F_A} = (2k(q^2/d^2) \cos 60° - k\,(q^2/d^2))\, \mathbf{j} = 0$ (essendo $2 \cos 60° = 2 \cdot ½ = 1$)

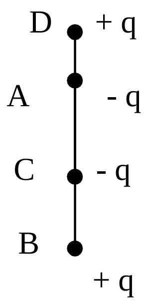
Dunque neanche su A e C occorrono forze vincolari.

b)

$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ essendo F sulla stessa direzione di r.

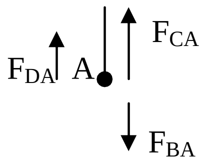
c)

Osserviamo innanzitutto che ora il momento non è più nullo, le componenti verticali ad esempio di F_{AB} e F_{CB} non sono più uguali (ed opposte) ma c’è uno sbilanciamento in favore di $F_{AB,y}$ per cui il momento è diretto in alto e provoca una rotazione antioraria riportando l’asta in posizione iniziale o poi continuando a ruotare fino all’allineamento dell’asta con le altre due cariche. Posizione finale di equilibrio:



d)

Riferendoci alla figura precedente sulla carica –q in alto intervengono tre forze:

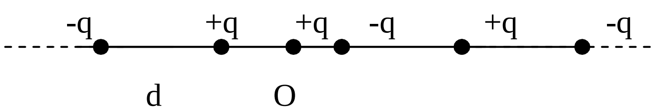


$F_A = F_{DA} + F_{CA} + F_{BA}$ possiamo usare le forme scalari perché ora il problema è unidimensionale
Inoltre abbiamo che $F_A = F_C$ e che su D e B non occorrono forze perché esse sono su una sbarra.
Dunque $F_{DA} = - k\, q^2/(DA)^2 = - k\, q^2/(0.179\, a^2)$ (essendo DA = a – a/tan60° = 0.423 a)
$F_{CA} = k\, q^2/(CA)^2 = k\, q^2/(1.32\, a^2)$ (essendo AC = AB = d = a/sin60° = 1.15 a)
$F_{BA} = - k\, q^2/(BA)^2 = - kq^2/(2.47\, a^2)$ (essendo AB = AC+CB= AC + DA = 1.15 a + 0.423 a = = 1.573 a)

$F_A = F_{DA} + F_{CA} - F_{BA} = k\, (q^2/a^2)\, (1/0.179 + 1/1.32 –$ ½.47$) = 5.94\, k\, (q^2/a^2)$

37)

d = 5 cm
q = 1 nC

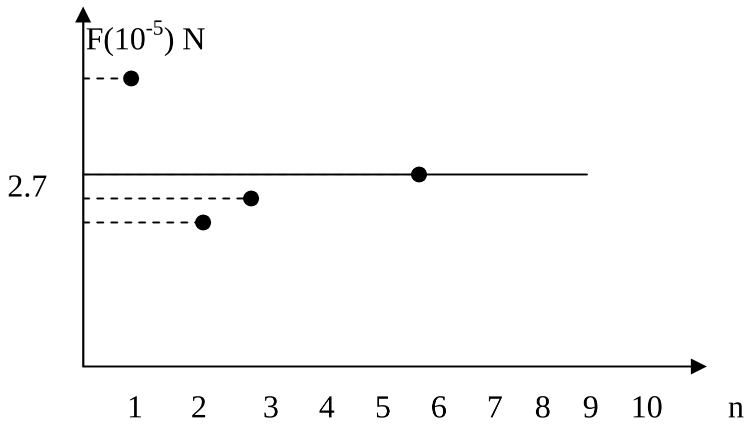


Rispetto al punto considerato O, le cariche sono disposte simmetricamente, ogni coppia è costituita da due cariche di segno opposto che danno un campo doppio di quello di una singola carica. Basta allora calcolare il contributo delle cariche poste da un aparta e poi moltiplicare per due.

$F_0 = F_{2,0} + F_{1,0} = 2\, F_{2,0}$ per   n = 1   (con n = numero di cariche da una parte)
$F_0 = 2\, (F_{2,0} + F_{3,0} + F_{4,0} + \ \dots)$
$F_{2,0} = k\, q^2/(d/2)^2 = 9{\cdot}10^9\, (10^{-9})^2/(2.5{\cdot}10^{-2})^2 = 1.44{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{0,n=1} = 2F_{2,0} = 2.88{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{3,0} = k\, q(-q)\, /(d+d/2)^2 = - 0.16{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{0,n=2} = 2\, (F_{2,0} + F_{3,0}) = 2.56{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{4,0} = kq^2/(2s+d/2)^2 = 0.058{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{0,n=3} = 2(F_{2,0} + F_{3,0} + F_{4,0}) = 2\, (2.88{\cdot}10^{-5} – 0.16{\cdot}10^{-5} + 0.058{\cdot}10^{-5}) = 2.676{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{5,0}\ k\, –q^2/(3d+d/2)^2 = - 0.03{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{0,n=4} = 2.616{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{0,n=5} = 2.65{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{0,n=6} = 2.63{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{0,n=7} = 2.65{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{0,n=8} = 2.67{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{0,n=9} = 2.66{\cdot}10^{-5}$ N
$F_{0,n=10} = 2.67{\cdot}10^{-5}$ N

riportiamo questi dati in una tabella

n	$F_{0,n}$ (10^{-5}) N
1	2.88
2	2.56
3	2.68
4	2.62
5	2.63
6	2.63
7	2.65
8	2.67
9	2.66
10	2.67



dopo n = 10 cioè 10 cariche per parte, il valore della forza su O si stabilisce intorno a $2.66 \cdot 10^{-5}$ N

b) Vediamo ad esempio l'errore fra F_{10} e F_9 $F_9/F_{10} = 2.66/2.67 = 0.996$ cioè un errore del 0.4% quindi con n=8 si ha l'approssimazione richiesta.

Quesiti

38)
$F_{PR}/F_{QR} = k\, q_P\, q_R/(d/2)^2 \,/\, k\, q_Q\, q_R \,/\, (d/2)^2 = q½q \,/\, ((½q)\,(½q)) = 2$ (con $q_P=q$ e $q_R=q_Q=½q$)
RISP. B

39)
Per la legge della composizione vettoriale la risposta evidentemente esatta è la C

40)

a) $F_{SQ} = F_{QR} = kq^2/\,\ell^2$ $F_{risultante\ (S+Q)} = \sqrt{2}\, k\, q^2/\,\ell^2$
$F_{PR} = -\, k\, 2q^2(\sqrt{2}\,\ell)^2 = -k\, q^2/\,\ell^2$ non è questo il caso

b) $F_{SR} = F_{QR} = k\, q^2/\,\ell^2$ $F_{R+S} = \sqrt{2}\, k\, q^2/\,\ell^2$
$F_{PR} = -\, 2k\, q^2/\,\ell^2$ non è questo il caso

c) $F_{SQ} = F_{QR} = 2\ 2k\, q^2/\,\ell^2$ Fris $= 2\sqrt{2}\, k\, q^2/\,\ell^2$
$F_{PR} = k\ \ q^2/\, 2\ell^2$ non è questo il caso
Quindi la risposta esatta è la E

41)
La considerazione che Q ed S non si attraggono è sufficiente per scegliere:
la risposta giusta che è la E

42)
$F(R) = k/R_2$ per $R \longrightarrow \infty$ $F(R) \longrightarrow 0$

Risp. A