Soluzione degli esercizi sul moto circolare uniforme

Esercizio 1. Risulta $R = 6\ m$ e $T = 8\ s$, per cui:
a) $v = \dfrac{2\,\pi R}{T} \;\Rightarrow\; v \approx 4,7\ m/s$; b) $a_c = \dfrac{v^2}{R} \;\Rightarrow\; a_c \approx 3,7\ m/s^2$.

Esercizio 2. Determiniamo il periodo: $T = \dfrac{39\ s}{7,75} \;\Rightarrow\; T \approx 5,03\ s$; $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T} \;\Rightarrow\; \omega \approx 1,25\ rad/s$.

Esercizio 3. a) $v = \dfrac{2\,\pi R}{T} \;\Rightarrow\; v \approx 29626\ m/s$; b) $a_c = \dfrac{v^2}{R} \;\Rightarrow\; a_c \approx 5,9 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$.

Esercizio 4. a) $v = \dfrac{2\,\pi R}{T} \;\Rightarrow\; v \approx 1023\ m/s$; b) $a_c = \dfrac{v^2}{R} \;\Rightarrow\; a_c \approx 2,7 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$.

Esercizio 5. a) $v = \dfrac{2\,\pi R}{T} \;\Rightarrow\; v \approx 2,6 \cdot 10^5\ m/s$; b) $a_c = \dfrac{v^2}{R} \;\Rightarrow\; a_c \approx 2,3 \cdot 10^{-10}\ m/s^2$.

Esercizio 6. Il periodo è: $T = \dfrac{18\ s}{5 + \frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; T \approx 3,18\ s$; la velocità angolare è
$\omega = \dfrac{2\,\pi}{T} \;\Rightarrow\; \omega \approx 1,98\ rad/s$.
a) $a_c = \omega^2 R \;\Rightarrow\; R = \dfrac{a_c}{\omega^2} \;\Rightarrow\; R \approx 1,79\ m$; b) $v = \omega R \;\Rightarrow\; v \approx 3,54\ m/s$;
c) $f = \dfrac{1}{T} \;\Rightarrow\; f = 0,31\ Hz$.

Esercizio 7. Lancetta delle ore: poiché il periodo è $T = 12 \cdot 3600\ s = 43200\ s$, risulta:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} \;\Rightarrow\; \omega \approx 0,00015\ rad/s\ .$$

Lancetta dei minuti: poiché il periodo è $T = 3600\ s$, risulta: $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T} \;\Rightarrow\; \omega \approx 0,0017\ rad/s$.
Lancetta dei secondi: poiché il periodo è $T = 60\ s$, risulta: $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T} \;\Rightarrow\; \omega \approx 0,105\ rad/s$.

Esercizio 8. Poiché $R = 0,275\ m$ risulta:
a) $f = \dfrac{1500}{60}\ Hz \;\Rightarrow\; f = 25\ Hz$; $T = \dfrac{1}{f} \;\Rightarrow\; T = 0,04\ s$; $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T} \;\Rightarrow\; \omega \approx 157\ rad/s$.
b) $v = \dfrac{2\,\pi R}{T} \;\Rightarrow\; v \approx 43,2\ m/s$; $a_c = \omega^2 R \;\Rightarrow\; a_c \approx 6785,4\ m/s^2$.

Esercizio 9. Poiché $108\ km/h = 30\ m/s$, abbiamo: $a_c = \dfrac{v^2}{R} \;\Rightarrow\; a_c = 9\ m/s^2$.
Se la velocità dimezza abbiamo:

$$a_c' = \frac{(v/2)^2}{R} \;\Rightarrow\; a_c' = \frac{1}{4} \cdot \frac{v^2}{R} \;\Rightarrow\; a_c' = \frac{a_c}{4}\ .$$

Esercizio 10. a) La velocità di un punto che si trova a $0,75\ m$ è $v = \dfrac{0,75\ m}{2,00\ m} \cdot 250\ m/s = 93,75\ m/s$.
b) $v = \omega R \;\Rightarrow\; \omega = \dfrac{v}{R} \;\Rightarrow\; \omega \approx 125\ rad/s$.

Esercizio 11. $a_c = \omega^2 R \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\dfrac{a_c}{R}} \;\Rightarrow\; \omega \approx 89,4\ rad/s$.

Esercizio 12. Determiniamo il periodo: $T = \dfrac{2\,\pi R}{v} \quad \Rightarrow \quad T \approx 2,67 \cdot 10^{-8}\ s$.

a) $f = \dfrac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad f \approx 3,74 \cdot 10^{7}\ Hz$. b) $a_c = \dfrac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad a_c \approx 1,88 \cdot 10^{15}\ m/s^2$.

Esercizio 13. $T = \dfrac{60}{33}\ s \quad \Rightarrow \quad T \approx 1,82\ s$; $f = \dfrac{33}{60}\ Hz \quad \Rightarrow \quad f = 0,55\ Hz$;
$\omega = \dfrac{2\,\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega \approx 3,46\ rad/s$.

Esercizio 14. Poiché $T = \dfrac{60}{1000}\ s \quad \Rightarrow \quad T = 0,06\ s$, abbiamo: $v = \dfrac{2\,\pi R}{T} \quad \Rightarrow \quad v \approx 47,1\ m/s$.

Esercizio 15. $a_c = \dfrac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{a_c R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{8,8 \cdot (6,38 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5)}\ m/s \quad \Rightarrow$
$v \approx 7724,2\ m/s$. $T = \dfrac{2\,\pi R}{v} \quad \Rightarrow \quad T \approx 5515\ s$.

Esercizio 16. Calcoliamo la velocità angolare: $\omega = \dfrac{\pi/6\ rad}{1,2\ s} \quad \Rightarrow \quad \omega \approx 0,44\ rad/s$.
a) $T = \dfrac{2\,\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad T \approx 14,4\ s$. b) $a_c = \omega^2 R \quad \Rightarrow \quad a_c \approx 0,13\ m/s^2$.

Esercizio 17. $\dfrac{v}{a} = \dfrac{\omega R}{\omega^2 R} = \dfrac{\cancel{\omega}\cancel{R}}{\omega^{\cancel{2}}\cancel{R}} = \dfrac{1}{\omega}$. La risposta corretta è quindi la a).

Esercizio 18. La risposta corretta è la d).

Esercizio 19. $a_c = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(2\,\pi R f)^2}{R} = \dfrac{4\,\pi^2 R^2 f^2}{R} = \dfrac{4\,\pi^2 R^{\cancel{2}} f^2}{\cancel{R}} = 4\,\pi^2 R f^2$.

Esercizio 20. a) $\omega = 2\,\pi f \quad \Rightarrow \quad \omega \approx 41,89\ rad/s$. b) $\theta = \omega \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 3,14\ rad$ (nell'intervallo di tempo Δt il disco è perciò ruotato di un angolo piatto).

Esercizio 21. a) La velocità angolare è $\omega = \dfrac{\pi/2}{18}\ rad/s \approx 0,087\ rad/s$.
b) Il modulo dell'accelerazione centripeta è pari a $a_c = \omega^2 R \quad \Rightarrow \quad a_c = \omega(\omega R) \quad \Rightarrow \quad a_c = \omega v \quad \Rightarrow$
$a_c \approx 21,8\ m/s^2$.

Esercizio 22. Calcoliamo il modulo dell'accelerazione centripeta del treno se la curva viene affrontata alle velocità di 100 km/h:

$$a_c = \frac{\left(\dfrac{100}{3,6}\ \dfrac{m}{s}\right)^2}{10^3\ m} \approx 0,77\ m/s^2 \ ;$$

il macchinista deve quindi azionare i freni prima di affrontare la curva.

Esercizio 23. La velocità angolare è $\omega = \dfrac{2\,\pi}{86400}\ rad/s \quad \Rightarrow \quad \omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5}\ rad/s$, per cui abbiamo:
$a_c = \omega^2 R \quad \Rightarrow \quad a_c \approx 0,034\ m/s^2$.

Esercizio 24. Dalla formula $a_c = \dfrac{v^2}{R}$ ricaviamo $v = \sqrt{a_c \cdot R}$; quindi

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\sqrt{a_c \cdot (3\,R)}}{\sqrt{a_c \cdot R}} = \sqrt{\frac{3 \cdot \cancel{a_c \cdot R}}{\cancel{a_c \cdot R}}} = \sqrt{3}\ .$$

Esercizio 25. Determiniamo per prima cosa la velocità angolare:
$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\cdot\pi\cdot\dfrac{5,5}{8}\ rad/s \quad \Rightarrow \quad \omega \approx 4,32\ rad/s$; determiniamo ora il raggio R_A dalla formula $a_c = \omega^2 R$: $R_A = \dfrac{5}{(4,32)^2}\ m \quad \Rightarrow \quad R_A \approx 0,27\ m$; $v_B = 2\pi R_B f \quad \Rightarrow \quad v_B = 2\cdot\pi\cdot(1,6\cdot 0,27)\cdot\dfrac{5,5}{8}\ m/s \ \Rightarrow \ v_B \approx 1,9\ m/s$.

Esercizio 26. Le velocità angolari sono, rispettivamente:

$$\omega_A = \frac{2\pi}{T_A} \ ; \ \omega_B = \frac{2\pi}{T_B}$$

ipotizzando che all'istante $t = 0\ s$ i due corpi sono allineati con il centro, dalla stessa parte rispetto a questo, all'istante generico t i due corpi hanno descritto archi di ampiezza

$$\theta_A = \omega_A\cdot t \ ; \ \theta_B = \omega_B\cdot t$$

i due corpi si trovano di nuovo allineati, dalla stessa parte rispetto a questo, quando

$$\theta_A - \theta_B = 2\pi \ \Rightarrow \ (\omega_A - \omega_B)\cdot t = 2\pi \ \Rightarrow \ t = \frac{2\pi}{\omega_A - \omega_B} \ \Rightarrow \ t = \frac{1}{\dfrac{1}{T_A} - \dfrac{1}{T_B}}$$

sostituendo si ricava $t = 11,25\ s$.

Esercizio 27. Studiamo il caso in cui i due punti si muovono nello stesso senso: indicando con t_1 l'istante in cui si incontrano per la prima volta, risulta: $\omega_A\cdot t_1 - \omega_B\cdot t_1 = 2\pi \ \Rightarrow \ \omega_A - \omega_B = \dfrac{2\pi}{t_1}$.

Analizziamo ora il caso in cui i due punti si muovono in senso opposto: indicando con t_2 l'istante in cui si incontrano per la prima volta, risulta: $\omega_A\cdot t_2 + \omega_B\cdot t_2 = 2\pi \ \Rightarrow \ \omega_A + \omega_B = \dfrac{2\pi}{t_2}$.

Risolvendo il sistema lineare $\begin{cases} \omega_A - \omega_B = \dfrac{2\pi}{t_1} \\ \omega_A + \omega_B = \dfrac{2\pi}{t_2} \end{cases}$ si ricava

$\begin{cases} \omega_A = \pi\left(\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2}\right) \\ \omega_B = \pi\left(\dfrac{1}{t_2} - \dfrac{1}{t_1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_A \approx 0,942\ rad/s \\ \omega_B \approx 0,628\ rad/s\ . \end{cases}$ Le velocità, perciò, sono: $\begin{cases} v_A \approx 4,71\ m/s \\ v_B \approx 3,14\ m/s\ . \end{cases}$

Esercizio 28. L'auto viaggia a $30\ m/s$, quindi in un minuto percorre $1800\ m$; dal momento che ogni pneumatico compie un giro completo quando l'auto si è spostata di $2\pi R$, ovvero di $1,57\ m$, ogni pneumatico in un minuto compie $\dfrac{1800}{1,57} \approx 1146$ giri completi.

Esercizio 29. La legge oraria del sasso dopo la rottura della cordicella è:

$$\begin{cases} x = v_o\, t \\ y = 2 - 4,9\, t^2 \end{cases}$$

poiché il sasso cade nel punto di coordinate $(6\,;\,0)$, si ha:

$$\begin{cases} 6 = v_o\, t \\ 0 = 2 - 4,9\, t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\ m = v_o\cdot(0,64\ s) \\ t \approx 0,64\ s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_o \approx 9,38\ m/s \\ t \approx 0,64\ s\ . \end{cases}$$

La velocità angolare prima della rottura della cordicella era $\omega = \dfrac{v}{R} \ \Rightarrow \ \omega \approx 31,27\ rad/s$.