Problemi di Fisica

Le Equazioni di Maxwell
e le Onde Elettromagnetiche

ESERCIZI

Esercizio

Una spira circolare di raggio R=2,9 cm è immersa in un campo magnetico uniforme $B=6{,}8\cdot 10^{-6}$ T, le cui linee di campo formano un angolo di 60° con il piano della spira.

A) Determina il modulo della circuitazione del campo elettrico **E** lungo un cammino che coincide con la spira circolare.

A partire dall'istante t=0 s, il valore del campo del campo magnetico diminuisce progressivamente fino a raggiungere l'intensità di $9{,}7\cdot 10^{-7}$ T all'istante $t_1=15$ s.

B) Determina il modulo della circuitazione media di **E** lungo un cammino che coincide con la spira circolare durante l'intervallo di tempo in cui il campo magnetico diminuisce di valore.

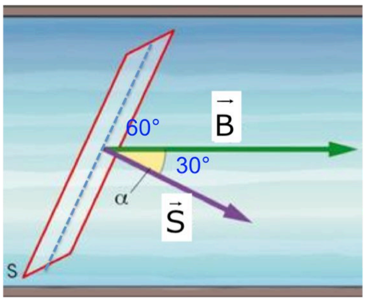
Soluzione

A) Poichè il campo magnetico **B** è costante nel tempo, la circuitazione del campo elettrico **E** lungo un cammino γ che coincide con la spira circolare è nulla. Ossia, non c'è nessun campo elettrico indotto nella spira:

$$C_\gamma(\vec{E}) = \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} \xrightarrow{\vec{B}=\cos t} C_\gamma(\vec{E}) = 0$$

B) Adesso il campo magnetico, e quindi il suo flusso, è variabile nel tempo, per cui, in base alla terza equazione di Maxwell, la circuitazione lungo il cammino γ che coincide con la spira circolare è diversa da zero:

$$C_\gamma(\vec{E}) = \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta dt} \neq 0$$



Poiché siamo interessati al modulo della circuitazione, non consideriamo il segno "meno" contenuto nell'equazione. Calcoliamo il valore della circuitazione.

Poichè le linee di campo **B** formano un angolo di 60° con il piano della spira, allora tra **B** e il vettore superficie **S** ci sono 30°, per cui il flusso del campo magnetico **B** all'istante t=0 s vale:

$$\Phi(\vec{B}_i) = \vec{B}_i \bullet \vec{S} = B_i \cdot S \cdot \cos 30° =$$
$$6{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot \pi (2{,}9 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 0{,}866 = 1{,}58 \cdot 10^{-8} \; Wb$$

Mentre all'istante t=15 s vale:

$$\Phi(\vec{B}_f) = \vec{B}_f \bullet \vec{S} = B_f \cdot S \cdot \cos 30° =$$
$$9{,}7 \cdot 10^{-7} \cdot \pi (2{,}9 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 0{,}866 = 2{,}25 \cdot 10^{-9} \; Wb$$

In conclusione, il modulo della circuitazione assume il valore:

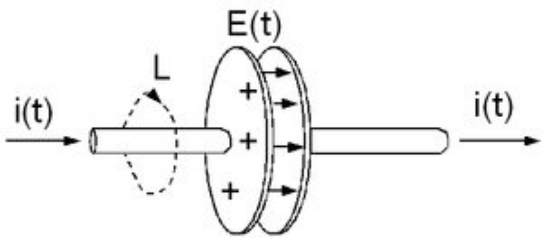
$$C_\gamma(\vec{E}) = \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta dt} = \frac{\Phi(\vec{B}_f) - \Phi(\vec{B}_i)}{t_f - t_i} = \frac{0{,}225 \cdot 10^{-8} - 1{,}58 \cdot 10^{-8}}{15} = 0{,}09 \cdot 10^{-8} \; Nm/C$$

Esercizio

Calcolare la corrente di spostamento che attraversa un condensatore piano avente armature circolari di raggio 5,0 cm, sapendo che la variazione del campo elettrico nell'unità di tempo è uguale a $1{,}0 \cdot 10^{12}$ V/m·s.

Soluzione

Se il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S del condensatore piano varia della quantità $\Delta\Phi(E)$ in un tempo Δt, l'intensità media della corrente di spostamento che fluisce attraverso la superficie S è espressa da:



$$i_s = \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t}$$

Poiché il campo elettrico all'interno del condensatore può essere considerato uniforme e perpendicolare alle armature, mentre all'esterno è approssimativamente nullo, il flusso del campo elettrico è definito come:

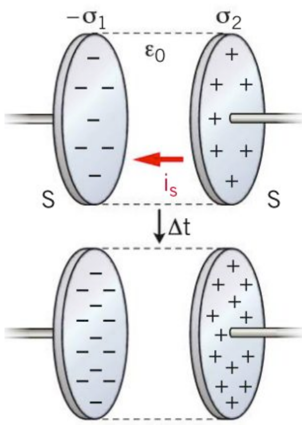
$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \bullet \vec{S} = E \cdot S$$

e nota la variazione del campo elettrico nell'unità di tempo, la corrente di spostamento assume il valore:

$$i_s = \varepsilon_0 S \frac{\Delta\vec{E}}{\Delta t} = 8{,}859 \cdot 10^{-12} \cdot \pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{12} = 0{,}07\,A$$

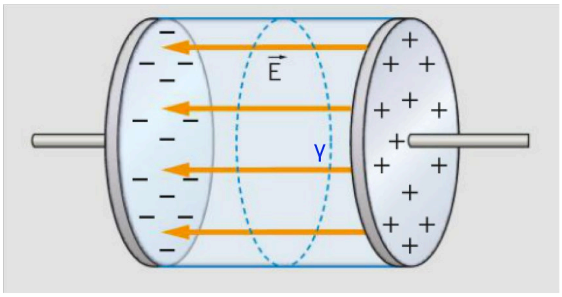
Esercizio

Un condensatore piano ha armature circolari di area 28,2 cm^2. Tra le armature c'è il vuoto. In 0,02 s la densità superficiale di carica sull'armatura positiva del consensatore varia da $1,77 \times 10^{-5}$ C/m^2 a $2,21 \times 10^{-5}$ C/m^2. Calcola: A) il valore della corrente di spostamento all'interno del condensatore; B) La circuitazione del campo magnetico indotto lungo un cammino che è il contorno di una superficie circolare interna al condensatore uguale a quella delle armature e parallela a esse.



Soluzione

A) Consideriamo, all'interno del condensatore, una superficie circolare uguale a quella delle armature del condensatore e parallela a essa. Visto che il campo elettrico è uniforme e perpendicolare alle armature, il flusso di **E** attraverso la superficie è dato da:



$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \bullet \vec{S}$$

Sappiamo pure che il campo elettrico **E** tra le armature di un condensatore è costante, diretto dall'armatura positiva a quella negativa e di modulo:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Poiché la densità superficiale di carica passa da σ_1 a σ_2 nell'intervallo di tempo Δt, allora il modulo del campo elettrico varia da:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \quad a \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

Pertanto, la corrente di spostamento all'interno del condensatore assume il valore:

$$i_s = \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0}{\Delta t}\left[\Phi_2(\vec{E}) - \Phi_1(\vec{E})\right] = \frac{\varepsilon_0}{\Delta t}\left[E_2 S - E_1 S\right] = \frac{\varepsilon_0}{\Delta t}\left[\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} S - \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} S\right] = \frac{S}{\Delta t}\left[\sigma_2 - \sigma_1\right] =$$

$$\frac{28,2 \cdot 10^{-4}}{0,02}\left(2,21 \cdot 10^{-5} - 1,77 \cdot 10^{-5}\right) = 6,2 \cdot 10^{-7} \ A$$

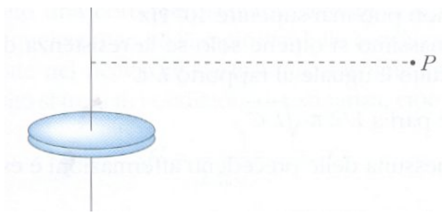
Si dimostra che la corrente di spostamento i_s è uguale alla corrente i che fluisce nel circuito nel quale è inserito il condensatore, e che produce, nel tempo Δt, l'aumento di densità superficiale di carica dal valore σ_1 a σ_2.

B) Applichiamo la quarta equazione di Maxwell per calcolare la circuitazione del campo magnetico, tenendo presente che attraverso la circonferenza γ, lungo la quale valuteremo la circuitazione, non fluisce nessuna corrente di conduzione:

$$C_\gamma(\vec{B}) = \mu_0\left[i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}\right] = \mu_0\left[i + i_s\right] \xrightarrow{i=0} C_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 i_s = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6{,}2\cdot 10^{-7} = 78\cdot 10^{-14}\ N/A = 0{,}78\ pA$$

Esercizio

Un condensatore piano, avente armature circolari di area uguale a 0,02 m^2 distanti fra loro 1mm, viene caricato da una batteria alla velocità di $4\cdot 10^{-9}$ C/s. Calcolare la corrente di spostamento attraverso il condensatore e il modulo del campo magnetico nel punto P, posto a una distanza di 40 cm dal filo di alimentazione che collega il condensatore alla batteria.



Soluzione

Per il teorema di Gauss si ha che il flusso del campo elettrico uscente da una superficie chiusa è dato da:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

per cui la variazione di flusso in un intervallo di tempo è pari a:

$$\frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (1)$$

La corrente di spostamento che fluisce attraverso la superficie S è espressa da:

$$i_s = \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t}$$

che confrontata con la (1) assume la seguente forma:

$$i_s = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (2)$$

per cui la corrente di spostamento è uguale allla velocità con cui la batteria carica il condensatore:

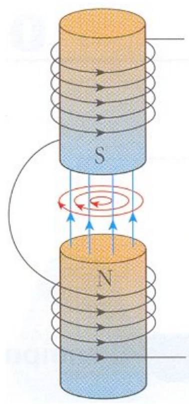
$$i_s = 4 \cdot 10^{-9}\,A$$

La (2) ci dice anche che la corrente di spostamento è uguale all'intensità di corrente che attraversa il circuito nel quale è inserito il condensatore, per cui il modulo del campo di induzione magnetica nel punto P assume il valore:

$$B = k\frac{i}{d} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{40 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-15}\,T$$

Esercizio

Nel sistema illustrato in figura la variazione del modulo del campo magnetico per unità di tempo è $\Delta B/\Delta t=0{,}20$ T/s. Qual è l'intensità del campo elettrico indotto in un punto a distanza r=0,50 m dall'asse dell'elettromagnete?



Soluzione

Calcoliamo la circuitazione del campo elettrico E lungo una circonferenza di raggio r con centro sull'asse dell'elettromagnete, cioè lungo una linea di forza del campo come mostrato in figura. Poiché il campo E è tangente in ogni punto alla circonferenza e il suo modulo E è uniforme su di essa, possiamo scrivere:

$$C(\vec{E}) = 2\pi r E$$

D'altra parte il flusso magnetico concatenato con la circonferenza, essendo il campo magnetico uniforme su tutti i punti della superficie $S = \pi r^2$ da essa delimitata, è:

$$\Phi(\vec{B}) = BS = \pi r^2 B$$

e la sua variazione per unità di tempo è:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

Per la legge di Faraday – Neumann la circuitazione del campo elettrico è data da:

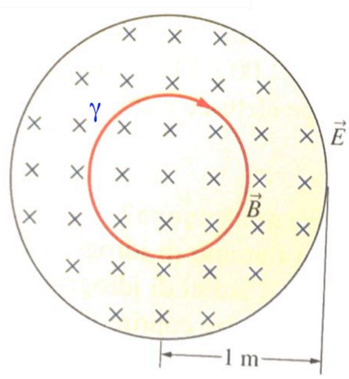
$$C(\vec{E}) = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

per cui si ottiene, prendendo i valori assoluti, che:

$$2\pi rE = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \qquad \text{da cui segue:} \qquad E = \frac{1}{2} r \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot 0,50 \cdot 0,20 = 0,05 N/C$$

Esercizio

Un campo elettrico ha verso entrante nel piano del foglio e occupa una regione cilindrica di raggio 1,0 m. La carica elettrica nella regione è nulla, ma è presente un campo magnetico le cui line di campo sono circolari e hanno verso orario. L'intensità del campo magnetico a 50 cm dal centro della regione è 2,0 μT. A) Qual è la rapidità di variazione del campo elettrico? B) Il campo elettrico sta aumentando o diminuendo?



Soluzione

A) Applichiamo la quarta equazione di Maxwell, tenendo presente che attraverso la circonferenza γ, lungo la quale valuteremo la circuitazione del campo magnetico, non fluisce nessuna corrente di conduzione:

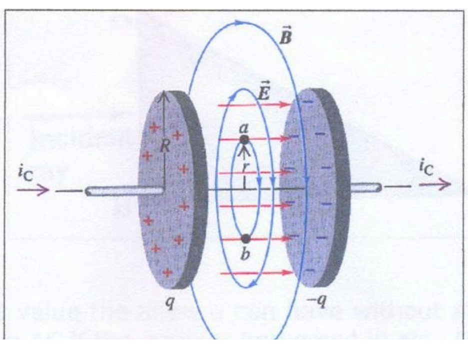
$$C_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \xrightarrow[A=\pi r^2]{\Phi(\vec{E})=AE} 2\pi rB = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2B}{\mu_0 \varepsilon_0 r} = \frac{2 \cdot 2,0 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,50} = 7,2 \cdot 10^{11} \frac{V}{m \cdot s}$$

B) Le linee di campo magnetico orarie indicano che il campo elettrico diretto verso l'interno della pagina sta aumentando.

Esercizio

Un condensatore piano a facce parallele ha armature di raggio 50 cm, distanziate di 1,0 mm. Il campo elettrico uniforme fra le armature varia con una rapidità di 1,0 MV/ms. Calcolare il campo magnetico fra le armature nei seguenti punti: a) sull'asse di simmetria; b) a 15 cm dall'asse.



Soluzione

Dalla quarta equazione di Maxwell:

$$C(\vec{B}) = \mu_0 \left[i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right] = \mu_0 (i + i_s) \qquad (1)$$

si deduce che una variazione del flusso del campo elettrico genera un campo magnetico. Cioè, la corrente di spostamento i_s produce un effetto magnetico al pari della corrente dovuta al movimento delle cariche. Dobbiamo perciò pensare che nella regione di spazio compreso fra le armature del condensatore abbia origine un campo magnetico. Le linee di forza del campo magnetico generato dalla corrente di spostamento sono pertanto circolari e con centro sull'asse di simmetria del condensatore (proprio come accade al campo magnetico generato da un filo percorso da corrente).
Applichiamo la quarta equazione di Maxwell per calcolare il campo magnetico all'interno del condensatore, tenendo presente che attraverso la circonferenza di raggio r, lungo la quale valuteremo la circuitazione del campo magnetico e che coincide proprio con una linea del campo magnetico, non fluisce nessuna corrente di conduzione:

$$C(\vec{B}) = \Sigma \vec{B} \bullet \Delta \vec{s} = B \cdot 2\pi r$$

e quindi, grazie all'applicazione della (1), si ottiene il modulo di **B**:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt}$$

per cui:

a) il campo magnetico sull'asse di simmetria vale zero perchè r=0

$$B(0) = 0$$

b) il campo magnetico a r=15 cm dall'asse vale:

$$B(15\ cm) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{2} \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{6} = 8{,}3 \cdot 10^{-13}\ T$$

Esercizio

Un'onda elettromagnetica piana unidimensionale di frequenza $f = 7{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz si propaga nel vuoto lungo l'asse x. Scrivere l'espressione del campo elettrico di ampiezza $E_0 = 10^3$ V/m.

Soluzione

a) Il campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana, linearmente polarizzata monocromatica e che si propaga lungo x, può essere scritto nella forma:

$$E(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t) = 10^3 \sin(1{,}57 \cdot 10^7 x - 4{,}7 \cdot 10^{15} t)$$

dove i parametri dell'onda sono stati così calcolati:

- Lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{7{,}5 \cdot 10^{14}} = 0{,}4 \cdot 10^{-6} m = 0{,}4 \ \mu m$$

Si tratta di radiazione visibile, in particolare violetto.

- Numero d'onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}4 \cdot 10^{-6}} = 1{,}57 \cdot 10^7 \ rad/m$$

- Pulsazione:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 7{,}5 \cdot 10^{14} = 4{,}7 \cdot 10^{15} \ rad/s$$

Esercizio

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza f=2,0 MHz, con il campo elettrico di ampiezza E_0=2,00·10^4 N/C, si propaga in una sostanza avente costante dielettrica relativa ε_r=4,50 e permeabilità magnetica relativa μ=1,00. Calcolare la velocità di propagazione la velocità di propagazione, la lunghezza d'onda e l'ampiezza del campo magnetico.

Soluzione

I parametri caratteristici dell'onda elettromagnetica sono:

- Velocità di propagazione:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{\sqrt{4{,}50 \cdot 1{,}00}} = 1{,}41 \cdot 10^8 \, m/s$$

- Lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1{,}41 \cdot 10^8}{2{,}00 \cdot 10^6} = 70{,}5 m$$

- Ampiezza del campo magnetico:

$$B_0 = \sqrt{\varepsilon_o \mu_0} E_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{2,00 \cdot 10^4}{3,00 \cdot 10^8} = 6,67 \cdot 10^{-5}\ T$$

Esercizio

In una giornata soleggiata l'intensità della radiazione solare sulla superficie della Terra (distanza media Sole-Terra $d=1,50 \cdot 10^{11}$ m) è $I=1,365 \cdot 10^3$ W/m. Calcolare la densità media dell'energia solare sulla Terra e la potenza totale media irraggiata dal Sole.

Soluzione

Dalla relazione dell'intensità di un'onda elettromagnetica ricaviamo la densità media dell'energia solare che giunge sulla Terra:

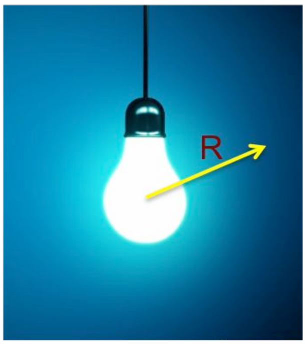
$$I = \bar{u}c \Rightarrow \bar{u} = \frac{I}{c} = \frac{1,365 \cdot 10^3}{3,00 \cdot 10^8} = 4,55 \cdot 10^{-6}\ J/m^3$$

La potenza totale media irraggiata dal Sole è il prodotto dell'intensità I della radiazione sulla Terra per la superficie sferica S sulla quale tale potenza si distribuisce:

$$\bar{P} = 4\pi d^2 I = 4\pi \cdot (1,50 \cdot 10^{11})^2 \cdot 1,365 \cdot 10^3 = 3,86 \cdot 10^{26}\ W$$

Esercizio

Una stanza è illuminata da una lampadina a incandescenza. Sapendo che la lampadina irradia uniformemente in tutte le direzioni e consuma una potenza elettrica media di 50,0 W, calcolare i valori efficaci di E e B alla distanza di 1,00 dalla lampadina.
Si assuma che venga trasformato in luce il 5,00% della potenza media assorbita dalla lampadina.



Soluzione

I valori efficaci del campo elettrico e del campo magnetico sono legati all'intensità media della luce dalle seguenti relazioni:

$$I_m = c\varepsilon_0 E_{eff}^2 \qquad\qquad I_m = \frac{cB_{eff}^2}{\mu_0}$$

Pertanto, dobbiamo prima calcolare I_m. Poiché la lampadina irradia uniformemente in tutte le direzioni, lo sarà anche attraverso la superficie della sfera di raggio r=1,00 m. Quindi, l'intensità media sulla superficie in oggetto è:

$$I_m = \frac{P_m}{A} = \frac{50{,}0 \cdot 0{,}0500}{4\pi(1{,}00)^2} = 0{,}2 \ W/m^2$$

dove abbiamo tenuto conto che solo il 5% della potenza media assorbita dalla lampadina viene trasformata in luce.
Pertanto, dalle relazioni precedenti si ricava:

$$E_{eff} = \sqrt{\frac{I_m}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{0{,}2}{3{,}00 \cdot 10^8 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}} = 8{,}7 \ N/C$$

$$B_{eff} = \sqrt{\frac{\mu_0 I_m}{c}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}2}{3{,}00 \cdot 10^8}} = 2{,}9 \cdot 10^{-8} \ T$$

Nel vuoto, il campo elettrico e quello magnetico sono legati dalla seguente relazione:

$$E = cB$$

che possiamo utilizzare per calcolare la velocità della luce nel vuoto e quindi come verifica dei nostri risultati:

$$c = \frac{E_{eff}}{B_{eff}} = \frac{8{,}7}{2{,}9 \cdot 10^{-8}} = 3{,}00 \cdot 10^8 \ m/s$$

Esercizio

Una lampadina da 100 W irraggia uniformemente in tutte le direzioni il 10% della potenza assorbita. Qual è la densità media di energia del campo elettromagnetico a una distanza di 5,00 m dalla lampadina?

Soluzione

Poiché l'irraggiamento avviene in modo uniforme in tutto lo spazio, esprimiamo l'intensità I della radiazione luminosa emessa dalla lampadina a una certa distanza r come il rapporto P/S, dove P è il 10% della potenza media irraggiata ed S è la superficie di una sfera di raggio r centrata nel punto in cui si trova la lampadina:

$$I=\frac{P}{S}=\frac{P}{4\pi r^2}=\frac{10}{4\pi\cdot 5{,}00^2}=0{,}032\,W/m^2$$

Dalla relazione dell'intensità di un'onda elettromagnetica ricaviamo la densità media dell'energia del campo elettromagnetico alla distanza r dalla lampadina:

$$I=\bar{u}c\Rightarrow \bar{u}=\frac{I}{c}=\frac{0{,}032}{3\cdot 10^8}=1{,}06\cdot 10^{-10}\,J/m^3$$

Esercizio

Un uomo cammina per 200 m verso l'insegna luminosa di un bar e stima, una volta fermatosi, che l'intensità della radiazione luminosa emanata dall'insegna sia raddoppiata rispetto all'intensità che c'era nella posizione di partenza. Se la valutazione dell'uomo è giusta e se l'insegna irraggia la sua luce uniformemente in tutte le direzioni, a quale distanza dall'insegna si trovava l'uomo prima di mettersi a camminare?

Soluzione

Poiché l'irraggiamento avviene in modo uniforme in tutto lo spazio, esprimiamo l'intensità I della radiazione luminosa emessa dall'insegna a una certa distanza d come il rapporto P/S, dove P è la potenza media irraggiata ed S è la superficie di una sfera di raggio d centrata nel punto in cui si trova l'insegna.
Indicate con d_i e d_f rispettivamente la distanza iniziale e finale dell'uomo dall'insegna, risulta:

$$I_f=\frac{P}{4\pi d_f^2}=2I_i=2\cdot\frac{P}{4\pi d_i^2} \qquad \text{da cui si ricava che:} \qquad d_i^2=2d_f^2\Rightarrow d_i=\sqrt{2}d_f$$

Sapendo inoltre che:

$$d_i-d_f=200\,m\Rightarrow d_f=d_i-200$$

possiamo risalire alla distanza iniziale dell'uomo dall'insegna:

$$d_i=\sqrt{2}(d_i-200)\Rightarrow \sqrt{2}d_i-d_i=200\sqrt{2}\Rightarrow d_i=\frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=683\,m$$

Esercizio

L'ampiezza del campo magnetico di un'onda elettromagnetica monocromatica in un certo punto è $9{,}0\cdot10^{-8}$ T. Quali sono l'ampiezza del campo elettrico e la densità media di energia nello stesso punto?

Soluzione

Si dimostra che i valori massimi E_0 e B_0 del campo elettrico e del campo magnetico di un'onda monocromatica sono legati dalla relazione:

$$B_0 = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_0$$

Nota l'ampiezza del campo magnetico in un punto, l'ampiezza del campo elettrico nello stesso punto vale:

$$E_0 = \frac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{9{,}0\cdot10^{-8}}{\sqrt{8{,}859\cdot10^{-12}\cdot12{,}56\cdot10^{-7}}} = 27\,V/m$$

Come tutte le onde, anche quelle elettromagnetiche trasportano energia, che è immagazzinata nel campo elettrico e nel campo magnetico.
Precisamente la densità media di energia di un'onda elettromagnetica monocromatica, in funzione del campo elettrico, è:

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2 = \frac{1}{2}\cdot8{,}856\cdot10^{-12}\cdot27^2 = 3{,}2\cdot10^{-9}\,J/m^3 \qquad (1)$$

mentre, in funzione del campo magnetico è:

$$\bar{u} = \frac{1}{2\mu_0}B_0^2 = \frac{1}{2\cdot12{,}56\cdot10^{-7}}\cdot(9{,}0\cdot10^{-8})^2 = 3{,}2\cdot10^{-9}\,J/m^3 \qquad (2)$$

Essendo le relazioni (1) e (2) equivalenti, il risultato della densità media è lo stesso.

Esercizio

Una sorgente di radiazione elettromagnetica monocromatica emette uniformemente, in tutte le direzioni, il 5% della potenza assorbita. Se l'intensità dell'onda emessa, alla distanza di 2,0 m, è uguale a 0,15 W/m², calcolare la potenza media assorbita e le ampiezze del campo elettrico e del campo magnetico a tale distanza.

Soluzione

L'irraggiamento avviene in modo uniforme in tutto lo spazio, per cui dalla relazione dell'intensità I della radiazione luminosa emessa dalla sorgente di radiazione elettromagnetica ricaviamo la potenza emessa dalla sorgente:

$$I = \frac{P_e}{4\pi r^2} \Rightarrow P_e = 4\pi r^2 I = 4\pi \cdot 2^2 \cdot 0,15 = 7,54\,W$$

Pertanto, la potenza media assorbita vale:

$$P_a = \frac{P_e}{5\%} = \frac{P_e}{0,05} = 150\,W$$

Dalla relazione dell'intensità di un'onda elettromagnetica ricaviamo la densità media dell'energia del campo elettromagnetico:

$$I = \bar{u}c \Rightarrow \bar{u} = \frac{I}{c} = \frac{0,15}{3 \cdot 10^8} = 0,05 \cdot 10^{-8}\,J/m^3$$

per cui, dall'espressione della densità dell'energia immagazzinata dalla radiazione elettromagnetica ricaviamo le ampiezze del campo elettrico e del campo magnetico alla distanza r:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot u}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,05 \cdot 10^{-8}}{8,856 \cdot 10^{-12}}} = 11\,V/m$$

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \Rightarrow B_0 = \sqrt{2\mu_0 u} = \sqrt{2 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 0,05 \cdot 10^{-8}} = 3,5 \cdot 10^{-8}\,T$$

Esercizio

Il valore massimo del campo elettrico di un'onda elettromagnetica è 0,0400 V/m. Calcola il modulo del vettore di Poynting associate all'onda.

Soluzione

Il vettore di Poynting è definito come il prodotto scalare tra il vettore campo elettrico **E** e quello magnetico **B**:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \otimes \vec{B}$$

Poiché il campo elettrico e quello magnetico sono perpendicolari tra di loro, il modulo di **S** vale:

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}E_{max}\cdot B_{max}=\frac{1}{4\pi\cdot 10^{-7}}\cdot 0{,}0400\cdot 1{,}33\cdot 10^{-10}=4{,}24\cdot 10^{-6}W/m^2$$

dove B_{max} è stato calcolato utilizzando la relazione che lega il campo elettrico a quello magnetico:

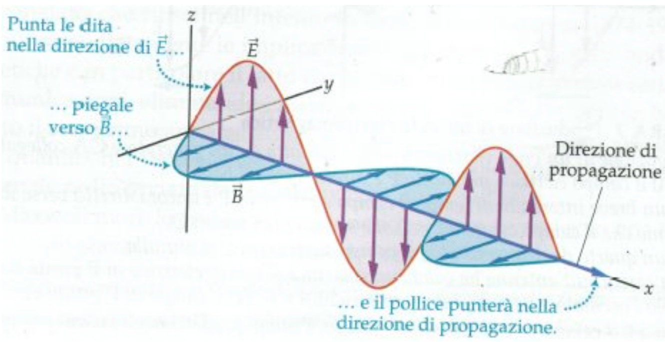
$$E_{max}=cB_{max}\rightarrow B_{max}=\frac{E_{max}}{c}=\frac{0{,}0400}{3{,}00\cdot 10^8}=1{,}33\cdot 10^{-10}\ T$$

Esercizio

Un fascio di luce si propaga nel verso positivo dell'asse x. In un certo istante il suo campo magnetico ha componenti B_y=-3,2x10^{-9} T e B_z=5,28x10^{-9} T e il modulo del campo elettrico è E=1,82 N/C.

1. Nell'istante considerato la componente x del campo elettrico e magnetico è positiva, negativa o nulla? Giustifica la risposta.
2. Esprimi il campo magnetico **E** in termini di componenti.
3. Calcola l'intensità dell'onda elettromagnetica.

Soluzione



1. L'onda elettromagnetica si propaga lungo l'asse x, ed essendo un'onda trasversale, il vettore campo elettrico e magnetico sono perpendicolari tra loro e, a loro volta, perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda. Pertanto, i vettori **E** e **B** hanno componente nulla lungo x.

2. Le componenti y e z del vettore campo magnetico sono proporzionali alle componenti z e y del campo elettrico. Attraverso la regola della mano destra determiniamo il segno delle componenti. Pertanto, dalla relazione che lega i moduli del campo elettrico e magnetico:

$$E=cB$$

si ricava che:

$$E_y=cB_z=3{,}00\cdot 10^8\cdot 5{,}28\cdot 10^{-9}=1{,}58\ N/C$$
$$E_z=-cB_y=3{,}00\cdot 10^8\cdot 3{,}2\cdot 10^{-9}=-0{,}96\ N/C$$

3. L'intensità dell'onda elettromagnetica è uguale al modulo del vettore di Poynting **S**:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \otimes \vec{B} \xrightarrow[\cos\vartheta=1]{\vec{E}\ e\ \vec{B}\ sono\ perpendicolari} I = S = \frac{1}{\mu_0}EB = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}}(1{,}85 \cdot 6{,}17 \cdot 10^{-9}) = 9{,}1 \cdot 10^{-3}\ W/m^2$$

dove:

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{1{,}58^2 + 0{,}96^2} = 1{,}85\ N/C$$
$$B = \sqrt{B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(3{,}2 \cdot 10^{-9})^2 + (-5{,}28 \cdot 10^{-9})^2} = 6{,}17\ N/C$$

Esercizio

Un piccolo laser emette un fascio di luce cilindrico di 1,00 mm di diametro con una Potenza media di 5,00 mW. Calcolare I valori massimi del campo elettrico e del campo magnetico per il fascio laser

Soluzione

L'intensità media è legata al campo elettrico efficace dalla seguente relazione:

$$I_m = c\varepsilon_0 E_{eff}^2$$

Sostituendo a I_m la sua definizione, otteniamo un'equazione nell'incognita E_{eff}:

$$\frac{P}{A} = c\varepsilon_0 E_{eff}^2 \Rightarrow E_{eff} = \sqrt{\frac{P}{c\varepsilon_0 A}} = \sqrt{\frac{5{,}00 \cdot 10^{-3}}{3{,}00 \cdot 10^8 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \pi \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3})^2}} = 1549\ N/C$$

Il valore massimo del campo elettrico vale:

$$E_{eff} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow E_{max} = \sqrt{2}E_{eff} = \sqrt{2} \cdot 1549 = 2191\ N/C$$

Mentre il valore massimo del campo magnetico lo ricaviamo dalla relazione che lo lega al campo elettrico:

$$E_{max} = cB_{\max} \Rightarrow B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} = \frac{2191}{3{,}00 \cdot 10^8} = 7{,}30 \cdot 10^{-6}T$$

Esercizio

Un laser da 5,0 mW produce un fascio di luce collimato. 1) Quanta energia è contenuta in 1,0 m di lunghezza del raggio laser? 2) Quale lunghezza di un raggio laser da 5,0 mW conterrà 9,5 mJ di energia?

Soluzione

1) Per definizione, l'energia contenuta in 1,0 m di raggio laser è data da:

$$E = P\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,3 \cdot 10^{-9} = 1,7 \cdot 10^{-11} J = 17 \;\; pJ$$

dove:

$$\Delta t = \frac{L}{c} = \frac{1,00}{3,00 \cdot 10^{8}} = 3,33 \cdot 10^{-9} s = 3,33 \;\; ns$$

2) Utilizzando le stesse formule precedenti si ottiene:

$$E = P\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{E}{P} = \frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{5,0 \cdot 10^{-3}} = 1,9 \;\; s$$

$$\Delta t = \frac{L}{c} \Rightarrow L = ct = 3,00 \cdot 10^{8} \cdot 1,9 = 5,7 \cdot 10^{8} \;\; m$$

Esercizio

a) Cosa succede quando un'onda elettromagnetica passa da un mezzo ad altro con densità diversa? b) Se la velocità dell'onda diminuisce, cosa succede alla lunghezza d'onda? c) Considera il caso in cui la velocità dell'onda diminuisca da c fino a ¾ c. Di quanto cambia la lunghezza d'onda?

Soluzione

a) La velocità di propagazione dell'onda e la lunghezza d'onda sono legate dalla relazione:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f}$$

La velocità di propagazione dell'onda varia con la natura e le caratteristiche del mezzo attraversato e conseguentemente cambia anche la lunghezza d'onda, la frequenza *f*, invece, è indipendente dal mezzo attraversato.

b) Dalle considerazioni fatte al punto a), se la velocità dell'onda diminuisce, anche la lunghezza d'onda diminuisce essendo tra di loro direttamente proporzionali.

c) Nel caso in cui la velocità dell'onda diminuisce da c fino a ¾ c, la lunghezza d'onda diminuisce della quantità:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\frac{\frac{3}{4}c}{f}}{\frac{c}{f}} = \frac{3}{4}$$

Esercizio

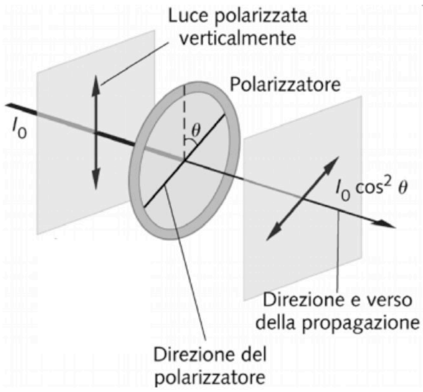
Calcola l'intensità trasmessa nei seguenti due casi:

a) un fascio di luce polarizzata verticalmente di intensità I_0 attraversa un polarizzatore il cui asse di trasmissione è inclinato di 60° rispetto alla verticale;
b) un fascio di luce polarizzato verticalmente di intensità I_0 attraversa due polarizzatori, il primo con l'asse di trasmissione inclinato di 30° rispetto alla verticale e il secondo con l'asse di trasmissione inclinato di altri 30° rispetto alla verticale.

Soluzione

a) Utilizzando la legge di Malus, si ottiene la seguente intensità trasmessa:

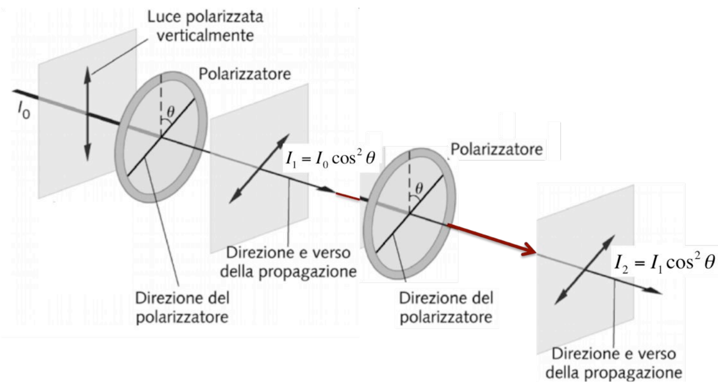
$$I = I_0 \cos^2\theta = I_0 \cos^2 60° = I_0\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{I_0}{4}$$



b) Adesso la luce polarizzata attraversa due polarizzatori. Applichiamo due volte la legge di Malus, facendo attenzione che la luce incidente sul secondo polarizzatore è quella trasmessa dal primo:

$$I_1 = I_0 \cos^2 30° = I_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} I_0$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 30° = \frac{3}{4} I_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{16} I_0$$



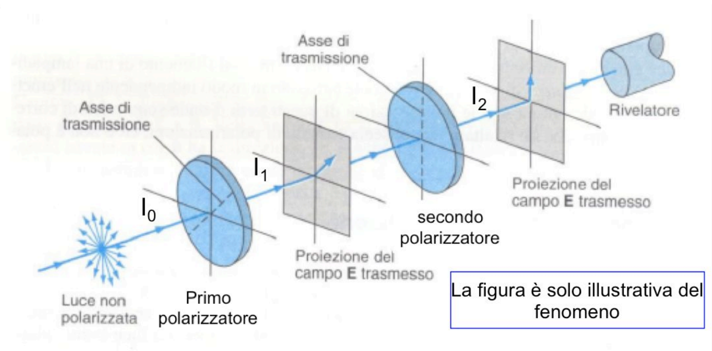
Osservazione: anche se la direzione di

polarizzazione è ruotata di 60° in entrambi i casi, quando vengono utilizzati due polarizzatori l'intensità trasmessa è maggiore di quella che si ha nel caso di un solo polarizzatore. In generale, più alto è il numero di polarizzatori utilizzato, ossia più graduale è la variazione della direzione di polarizzazione, maggiore sarà l'intensità finale trasmessa.

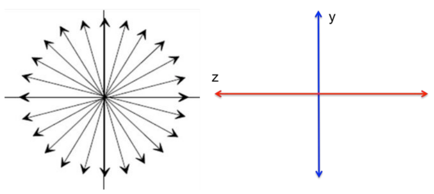
Esercizio

Una luce non polarizzata attraversa due polarizzatori. Calcolare l'angolo fra gli assi di trasmissione dei polarizzatori affinchè sia trasmesso 1/10 dell'intensità incidente I_0.

Soluzione



Un'onda non polarizzata può essere vista come la sovrapposizione di due onde piane polarizzate perpendicolari tra di loro. Se disponiamo l'asse y parallelo alla direzione di polarizzazione della lamina: le componenti y passeranno, mentre quelle z saranno assorbite. Se in origine la luce non è polarizzata, significa che le onde sono orientate in modo casuale, per cui la somma delle componenti y e la somma di quelle z sono uguali. Pertanto, se le componenti z sono assorbite metà dell'intensità originale I_0 viene perduta. In conclusione, l'intensità che emerge dalla prima lamina è:



$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

L''intensità della luce che emerge dalla seconda lamina è data dalla legge di Malus:

$$I_2 = I_1 \cos^2\theta = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta$$

Poiché vogliamo calcolare l'angolo fra gli assi di trasmissione dei polarizzatori affinchè l'intensità trasmessa I_2 sia 1/10 di quella incidente I_0, allora:

$$\frac{1}{10}I_0 = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{5} \rightarrow \cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}447 \Rightarrow \theta = ar\cos 0{,}447 = 63{,}4°$$

Esercizio

Un'onda elettromagnetica piana ha la frequenza f=3,0 MHz e il suo campo elettrico ha un'ampiezza $E_0=3{,}0\times10^3$ N/C. L'onda si propaga in una sostanza che ha permeabilità magnetica relativa di valore 1,0 e costante dielettrica relativa $\varepsilon_r=3{,}5$. Calcola: a) l'ampiezza del campo magnetico; b) la velocità di propagazione dell'onda piana; c) la sua lunghezza d'onda.

Soluzione

a) L'ampiezza del campo magnetico è legata a quella del campo elettrico dalla relazione:

$$E_0 = cB_0 \Rightarrow B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{3{,}0\cdot10^3}{3{,}00\cdot10^8} = 1{,}0\cdot10^{-5}T$$

b) In un mezzo con costante dielettrica relativa e permeabilità magnetica relativa, la velocità di propagazione dell'onda risulta:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{3{,}0\cdot10^3}{\sqrt{3{,}5\cdot1{,}0}} = 1{,}6\cdot10^8\ m/s$$

Corrisponde al 53,3% della velocità dell'onda nel vuoto.

c) La lunghezza d'onda è legata alla frequenza dalla relazione:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1{,}6\cdot10^3}{3{,}0\cdot10^6} = 53\ m$$

Si tratta di onde radio (10 cm-10 km).

Esercizio

Un'onda radio di frequenza $4{,}0\cdot10^3$ Hz passa dall'aria al vetro pirex, avente costante dielettrica relativa uguale a 4,5 e permeabilità magnetica relativa uguale a 1,0. Calcolare la velocità dell'onda, la sua lunghezza d'onda e la sua frequenza nel vetro.

Soluzione

In un mezzo con costante dielettrica relativa e permeabilità magnetica relativa, la velocità di propagazione dell'onda risulta:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{4,5 \cdot 1,0}} = 1,4 \cdot 10^8 \, m/s$$

L'onda radio, nel passaggio dall'aria al vetro pirex, subisce una rifrazione, e quindi una variazione di velocità e di lunghezza d'onda, legate dalla seguente legge:

$$\frac{c}{v} = \frac{\lambda_{aria}}{\lambda_{vetro}}$$

da cui è possibile ricavare la λ_{vetro}:

$$\lambda_{vetro} = \lambda_{aria} \frac{v}{c} = 0,75 \cdot 10^5 \cdot \frac{1,4 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = 0,35 \cdot 10^5 \, m$$

dove: $\lambda_{aria} = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{4,0 \cdot 10^3} = 0,75 \cdot 10^5 \, m$

La frequenza dell'onda radio, nel passaggio dall'aria al vetro non cambia, infatti:

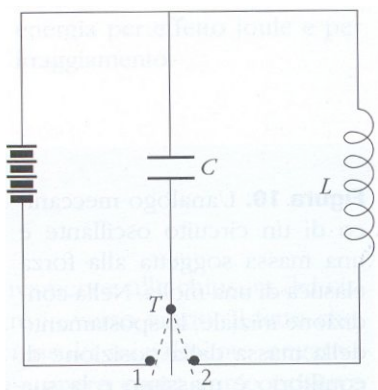
$$f = \frac{v}{\lambda_{vetro}} = \frac{1,4 \cdot 10^8}{0,35 \cdot 10^5} = 4,0 \cdot 10^3 \, Hz$$

Esercizio

Con un consumo di energia pari a 0,500 J, un condensatore viene caricato per mezzo di un generatore di forza elettromotrice costante di 1000 V. Una volta carico, il condensatore viene staccato dal generatore e collegato a un'induttanza di 2,00 H. Determinare la frequenza delle oscillazioni nel circuito oscillante.

Soluzione

Affinché il campo elettromagnetico si propaghi a grandi distanze è necessario che il vettore campo elettrico **E** e magnetico **B** siano sufficientemente intensi, e ciò è possibile se hanno ha disposizione correnti rapidamente variabili. Tali correnti si generano nei cosiddetti circuiti oscillanti, sfruttando la proprietà di immagazzinare energia, caratteristica dei condensatori e degli induttori.



In un simile dispositivo, la corrente che scorre nella bobina e la carica accumulata nel condensatore compiono oscillazioni libere persistenti la cui frequenza è:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (1)$$

L’energia necessaria per caricare il condensatore è uguale all’energia da esso immagazzinata una volta terminato il processo di carica:

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

da cui è possibile ricavare il valore della capacità:

$$C = \frac{2U}{V^2} = \frac{2 \cdot 0,5}{1000^2} = 10^{-6}\,F$$

Pertanto la (1) assume il valore:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 \cdot 10^{-6}}} = 113\,Hz$$

Esercizio

Una bobina di induttanza 2,0 mH e resistenza trascurabile viene collegata alle armature di un condensatore di capacità 2,0 nF inizialmente carico. Determinare la frequenza delle oscillazioni che si generano nel circuito e l'energia del circuito se la differenza di potenziale iniziale fra le armature del condensatore è 10 V.

Soluzione

In un simile dispositivo, chiamato circuito oscillante, la corrente che scorre nella bobina e la carica accumulata nel condensatore compiono oscillazioni libere persistenti la cui frequenza è:

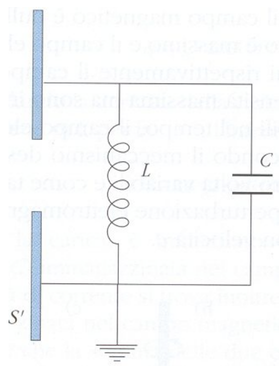
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2,0 \cdot 10^{-3} \cdot 2,0 \cdot 10^{-9}}} = 8,0 \cdot 10^4\,Hz$$

tipiche delle onde radio.
L’energia necessaria per caricare il condensatore è uguale all’energia da esso immagazzinata una volta terminato il processo di carica:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 10^{-9} \cdot 10^2 = 1,0 \cdot 10^{-7}\,J$$

Esercizio

Un ricevitore di onde elettromagnetiche è costituito da un induttore con L=2,00 H e da un condensatore di capacità variabile. Supponiamo che si voglia captare i seguenti segnali di lunghezza d'onda: $\lambda=10^2$ m (onde radio) ; $\lambda=10^{-3}$ m (microonde) ; $\lambda=0,8$ μm (infrarosso); $\lambda=10^{-8}$ m (ultravioletto). Qual è l'espressione della capacità C del condensatore tale da garantire una ricezione ottimale?



Soluzione

Un'antenna accoppiata a un circuito oscillante è utilizzata per la ricezione delle onde elettromagnetiche.
Un circuito ricevente con capacità C variabile può essere sintonizzato su varie frequenze; modificando C si può fare in modo, infatti, che la frequenza propria:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

sia uguale a quella dell'onda incidente:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Si dice in tal caso che il circuito è in risonanza o in sintonia con l'onda incidente. Nelle vecchie radio, girando la manopola di sintonizzazione si modifica la capacità di un condensatore variabile, in modo da entrare in risonanza con una determinata stazione che trasmette a frequenza fissata.
Quando l'onda elettromagnetica investe il circuito LC che funge da ricevitore, questa produce nel circuito una corrente oscillante avente la sua stessa frequenza. Perché l'ampiezza delle oscillazioni prodotte nel ricevitore sia massima bisogna che il circuito si trovi in condizioni di risonanza, cioè che sia:

$$f' = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f \quad (1)$$

avendo indicato con f′ la frequenza propria del circuito ricevente e con f la frequenza dell'onda elettromagnetica ricevuta.
Nell'ipotesi che l'onda elettromagnetica si propaghi nell'aria con la stessa velocità c con cui si propaga nel vuoto, la (1) diventa:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{c}{\lambda}$$

da cui si ricava la capacità:

$$C = \left(\frac{\lambda}{2\pi c}\right)^2 \cdot \frac{1}{L}$$

il cui valore per i vari tipi di onde è:

- ✓ Onde radio:

$$C = \left(\frac{10^2}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2,00} = 1,4 \cdot 10^{-15}\,F$$

- ✓ Microonde:

$$C = \left(\frac{10^{-3}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2,00} = 1,4 \cdot 10^{-25}\,F$$

- ✓ Infrarosso:

$$C = \left(\frac{0,8 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2,00} = 9 \cdot 10^{-32}\,F$$

- ✓ Ultravioletto:

$$C = \left(\frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2,00} = 2,8 \cdot 10^{-35}\,F$$

Esercizio

L'antenna di una stazione radio AM è costruita per essere alta $\lambda/4$, dove λ è la lunghezza d'onda delle onde radio. Quanto deve essere alta l'antenna per un segnale radio con una frequenza di 810 kHz?

Soluzione

Imponendo la condizione indicata dal problema e ricordando la relazione tra lunghezza d'onda, frequenza e velocità:

$$c = \lambda f$$

si ottiene:

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{4 \cdot 810 \cdot 10^3} = 93\ m$$

QUESITI

Quesito

Di quanto deve crescere ogni secondo la differenza di potenziale fra le armature di un condensatore da C=1,0 μF per generare una corrente di spostamento I_s=1,0 A all'interno del condensatore?

Soluzione

La ddp fra le armature del condensatore e la corrente sono definiti come:

$$V = \frac{Q}{C} \qquad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Quindi, la variazione di V al secondo fra le armature del condensatore per generare la corrente di spostamento I_s all'interno del condensatore è:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{C}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{I_s}{C} = \frac{1,0}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 1,0 \cdot 10^{6}\ V/s$$

Quesito

Un condensatore è costituito da due armature quadrate piane e parallele di forma quadrata con lato L=5,0 cm e distanti fra loro 0,50 mm. Qual è la corrente di spostamento al suo interno se la ddp fra le armature cresce di 5,0x10^5 V/s?

Soluzione

Per definizione, la corrente di spostamento è espressa come:

$$I_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Dall'elettrostatica sappiamo che le relazioni che esprimono il campo elettrico, il suo flusso e la ddp fra le armature di condensatore sono:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 L^2} \qquad V = Ed \qquad \Phi(\vec{E}) = E \cdot A = E \cdot L^2$$

Quindi, la corrente di spostamento vale:

$$I_s = \varepsilon_0 L^2 \frac{dE}{dt}$$

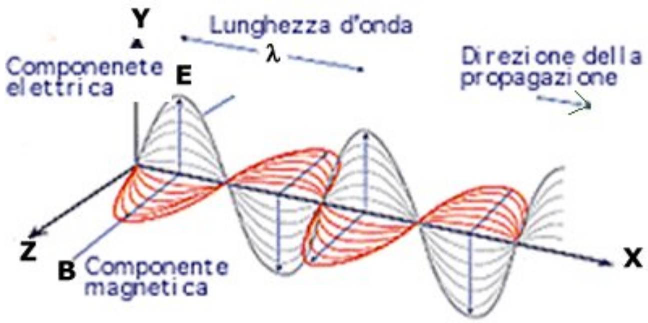
moltiplichiamo numeratore e denominatre per d (distanza tra le armature):

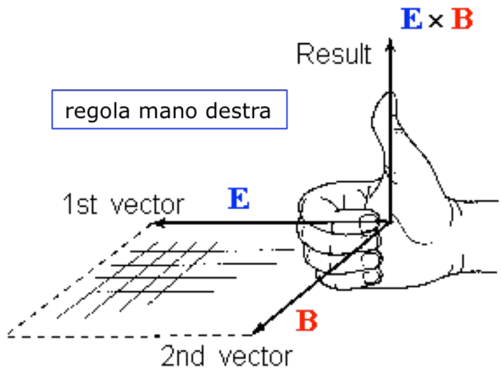
$$I_s = \varepsilon_0 \frac{L^2}{d} \frac{d(Ed)}{dt} = \varepsilon_0 \frac{L^2}{d} \frac{dV}{dt} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{(5{,}0 \cdot 10^{-2})^2}{0{,}50 \cdot 10^{-3}} \cdot 5{,}0 \cdot 10^5 = 22 \cdot 10^{-6} A = 22 \ \mu A$$

Quesito

Il campo elettrico di un'onda elettromagnetica punta nel verso positivo dell'asse y. Allo stesso tempo, il campo magnetico della stessa onda punta nel verso positivo dell'asse z. In quale direzione e verso si sta propagando l'onda?

Soluzione





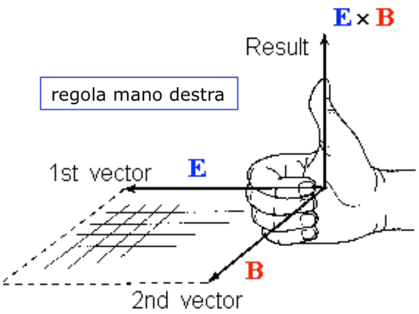
Applicando la regola della mano destra, si ricava che l'onda si propaga lungo l'asse positivo delle x. Risultato in accordo con il fatto che le onde elettomagnetiche sono onde trasversali.

Quesito

Completa la tabella indicando la direzione e il verso della grandezza sconosciuta per ognuna delle quattro onde elettromagnetiche elencate:

Direzione propagazione	Direzione campo elettrico	Direzione campo magnetico
+x	+y	
+x		+y
-y	+z	
	+z	+y

Soluzione



Applicando la regola della mano destra si ottiene:

Direzione propagazione	Direzione campo elettrico	Direzione campo magnetico
+x	+y	+z
+x	-z	+y
-y	+z	-x
-x	+z	+y

Quesito

Se a un certo istante l'intensità del campo elettrico di un'onda elettromagnetica varia, cosa succede all'intensità del campo magnetico in quello stesso istante?

Soluzione

L'intensità del campo elettrico e del campo magnetico di un'onda elettromagnetica sono direttamente proporzionali:

$$E = cB \qquad c = velocità\ della\ luce$$

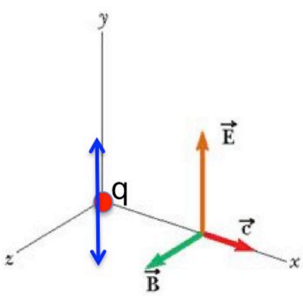
Pertanto, se il campo elettrico aumenta o diminuisce, contemporaneamente il campo magnetico farà la stessa cosa.

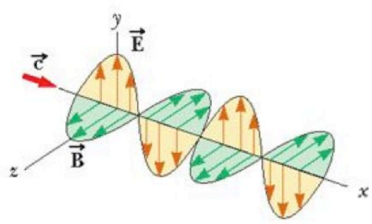
Quesito

Una carica elettrica situata sull'asse y oscilla con moto armonico intorno all'origine. Un osservatore si trova in un punto del semiasse positivo delle x, a grande distanza. A) In quale direzione oscilla il campo elettrico e il campo magnetico nel punto in cui si trova l'osservatore? B) In quale direzione e verso si propaga l'onda elettromagnetica nel punto in cui si trova l'osservatore?

Soluzione

Una carica elettrica oscillante genera un'onda elettromagnetica, ossia un'onda trasversale in cui campo elettrico **E** e campo magnetico **B** sono vettori oscillanti perpendicolari tra di loro e, a loro volta, perpendicolari alla direzione di





propagazione dell'onda **c**. Quindi, rispetto all'osservatore che si trova sull'asse positivo dell'asse y:

A) il campo elettrico **E** oscillerà in direzione y (stessa direzione della carica) e il campo magnetico **B** oscillerà in direzione z (perpendicolare al campo elettrico e alla direzione di propagazione dell'onda);
B) affinchè l'onda raggiunga l'osservatore non può che propagarsi in direzione dell'asse x positivo, in accordo con il suo carattere di onda trasversale (regola mano destra).

Quesito

Se il valore efficace del campo elettrico di un'onda elettromagnetica raddoppia, di quale fattore cambia il valore efficace del campo magneticco e l'intensità media dell'onda?

Soluzione

L'intensità del campo elettrico e del campo magnetico di un'onda elettromagnetica sono direttamente proporzionali:

$$E = cB \Rightarrow \sqrt{2}E_{eff} = c\ \sqrt{2}E_{eff} \Rightarrow \quad E_{eff} = cE_{eff} \qquad c = velocità\ della\ luce$$

per cui, se il valore efficace del campo elettrico raddoppia, contemporaneamente raddoppia anche quello del campo magnetico.
L'intensità dell'onda è legata al quadrato dell'ampiezza massima sia del campo elettrico che di quello magnetico:

$$I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2}\frac{c}{\mu_0}B_0^2 = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 c^2 B_0^2 + \frac{1}{2}\frac{c}{\mu_0}B_0^2 = \frac{1}{2}c\cancel{\varepsilon}_0 \frac{1}{\cancel{\varepsilon}_0\mu_0}B_0^2 + \frac{1}{2}\frac{c}{\mu_0}B_0^2 = \frac{c}{\mu_0}B_0^2$$

$$dove: c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \rightarrow c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \qquad E_0 = cB_0$$

in maniera analoga si ricava:

$$I = c\varepsilon_0 E_0^2$$

quindi anche l'intensità media dell'onda assumerà la stessa forma:

$$I_m = \frac{c}{\mu_0}B_{eff}^2 \qquad I_m = c\varepsilon_0 E_{eff}^2$$

Pertanto, se il valore efficace del campo elettrico raddoppia, l'intensità media aumenta di un fattore 4.

Quesito

A quale distanza una lampadina da 45 W sembra avere la stessa luminosità di una lampadina da 120 W vista da una distanza di 25 m?

Soluzione

Innanzitutto facciamo prima alcune ipotesi necessarie affinchè si possa rispondere al quesito: le due lampadine devono conservare la potenza assorbita in luce con la stessa efficienza e devono irraggiare uniformemente in tutte le direzioni.
Imponiamo la condizione dell'uguaglianza tra le intensità delle due lampadine:

$$I_{45} = I_{120}$$

Sostituendo alle rispettive intensità le loro definizioni, si ottiene un'equazione nell'incognita richiesta dal problema:

$$\frac{P_{45}}{A_{45}} = \frac{P_{120}}{A_{120}} \Rightarrow \frac{P_{45}}{\pi r_{45}} = \frac{P_{120}}{\pi r_{120}} \rightarrow r_{45} = r_{120}\sqrt{\frac{P_{45}}{P_{120}}} = 25 \cdot \sqrt{\frac{45}{120}} = 15\ m$$

Quesito

a) Calcola le ampiezze del campo elettrico e magnetico di un'onda elettromagnetica la cui densità di energia media vale 1,0 J/m; b) Di quale fattore devono essere aumentate le ampiezze dei campi se si vuole raddoppiare la densità di energia media?

Soluzione

Si dimostra che la densità volumica media dell'energia immagazzinata è espressa in funzione del solo campo elettrico o del campo magnetico:

$$u_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \qquad u_m = \frac{1}{2\mu_0}B_0^2$$

Queste relazioni mostrano anche che l'energia dell'onda elettromagnetica è immagazzinata in ugual misura dal campo elettrico e dal campo magnetico.
Dalle relazioni precedenti ricaviamo le ampiezze del campo elettrico e magnetico:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2u_m}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,0}{8,85 \cdot 10^{-12}}} = 4,8 \cdot 10^5\ V/m$$

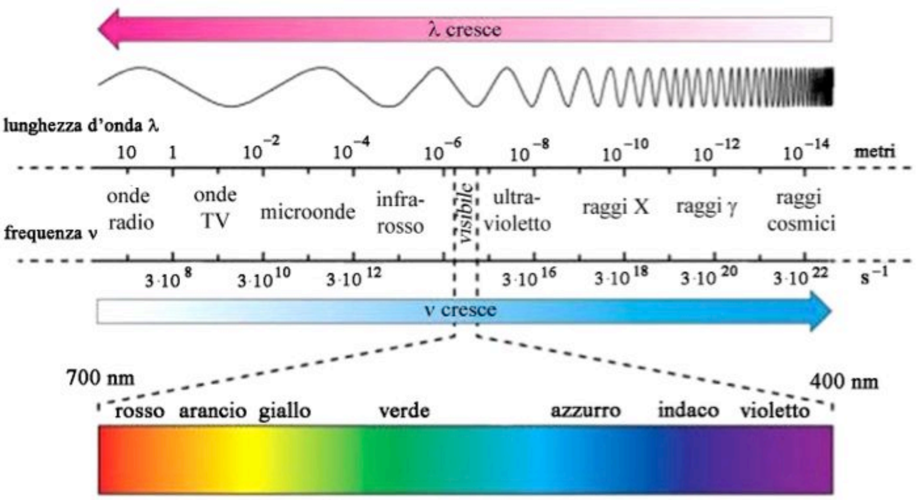
$$B_0 = \sqrt{2\mu_0 u_m} = \sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,0} = 1,6 \cdot 10^{-3}\ T = 1,6\ mT$$

Quesito

Tra il rosso (680 μm) e il blu (470 μm), quale colore di luce possiede la frequenza più alta?

Soluzione

Dallo spettro del visibile, notiamo che il blu ha frequenza più alta (lunghezza d'onda più bassa).



Infatti, utilizzando la relazione che lega la frequenza alla lunghezza d'onda, si ottiene:

$$f_{blu} = \frac{c}{\lambda_{blu}} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{470 \cdot 10^{-9}} = 6{,}4 \cdot 10^{14} H_z \qquad f_{rosso} = \frac{c}{\lambda_{rosso}} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{680 \cdot 10^{-9}} = 4{,}4 \cdot 10^{14} H_z$$

Quesito

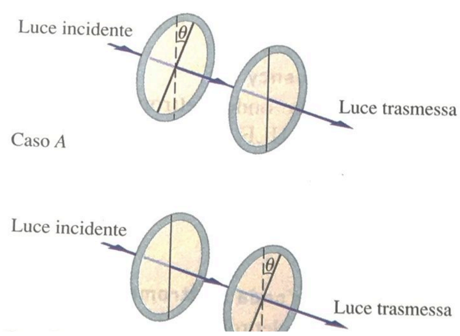
L'antenna di una stazione radio AM è alta 112 m. Se tale altezza rappresenta un quarto della lunghezza d'onda del segnale, qual è la frequenza a cui trasmette la stazione?

Soluzione

Imponendo la condizione indicata dal problema e ricordando la relazione tra lunghezza d'onda, frequenza e velocità:

$$c = \lambda f$$

si ottiene:

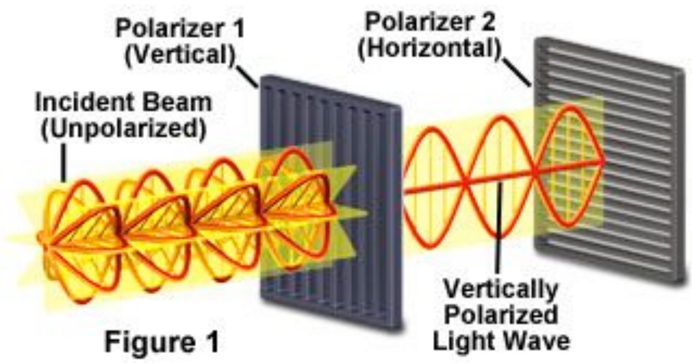


Quesito

Considera i due esperimenti sulla polarizzazione rappresentati in figura. Se la luce incidente è polarizzata orizzontalmente, confronta l'intensità trasmessa nel caso A con quella nel caso B.

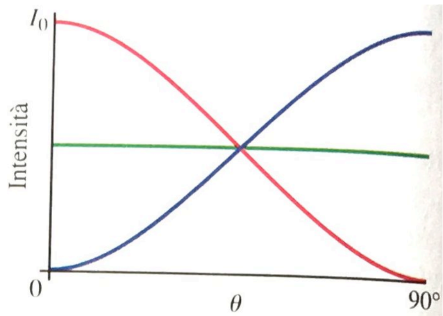
Soluzione

Le componenti dei vettori del campo elettrico parallele alla direzione di polarizzazione vengono trasmesse attraverso la lamina polarizzante. Le componenti perpendicolari alla direzione di polarizzazione vengono assorbita dalla lamina. Nel caso B l'onda polarizzata orizzontalmente viene completamente bloccata in quanto la direzione di polarizzazione è verticale. Pertanto, essendo l'intensità della luce proporzionale al quadrato del campo elettrico, l'intensità trasmessa è maggiore nel caso A in quanto nel caso B è addirittura nulla.

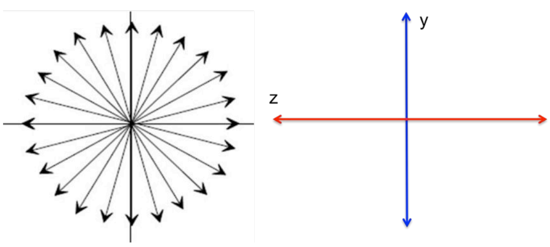


Quesito

Un fascio incidente di luce di intensità I_0 passa attraverso un filtro polarizzatore il cui asse di trasmissione forma un angolo θ con la verticale. L'andamento dell'intensità in funzione dell'angolo, per un angolo che varia fra $\theta=0°$ e $\theta=90°$, è rappresentato da una delle curve riportate in figura. Individua la curva corrispondente a un fascio incidente: a) non polarizzato; b) polarizzato verticalmente; c) polarizzato orizzontalmente.

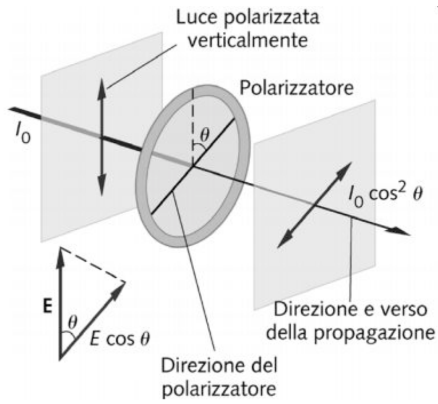


Soluzione



a) Un'onda non polarizzata può essere vista come la sovrapposizione di due onde piane polarizzate, l'una perpendicolare all'altra. Disponiamo l'asse y parallelo alla direzione di polarizzazione della lamina: le componenti y passeranno, mentre quelle z saranno assorbite. Se in origine la luce non è polarizzata, significa che le onde sono orientate in modo casuale, per cui la somma delle componenti y e la somma di quelle z sono uguali. Pertanto, se le componenti z sono assorbite, metà dell'intensità originale I_0 viene perduta e quindi l'intensità che emerge dalla lamina è la metà di quella incidente. In conclusione, la curva verde corrisponde alla luce non plarizzata.

b) In base alla legge di Malus:

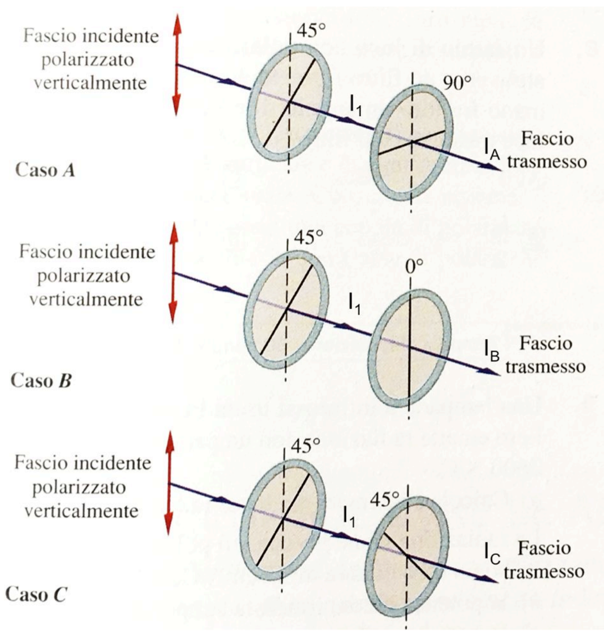


$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

per $\theta=0°$ si ha $I=I_0$, ossia la trasmissione è completa e diminuisce all'aumentare dell'angolo. Pertanto è la situazione in cui la luce è polarizzata verticalmente e la curva corrispondente è la rossa.

c) Sempre in base alla legge di Malus, per $\theta=0°$ si ha $I=0$, ossia la non c'è trasmissione e aumenta all'aumentare dell'angolo. Pertanto è la situazione in cui la luce è polarizzata orizzontalmente e la curva corrispondente è la verde.

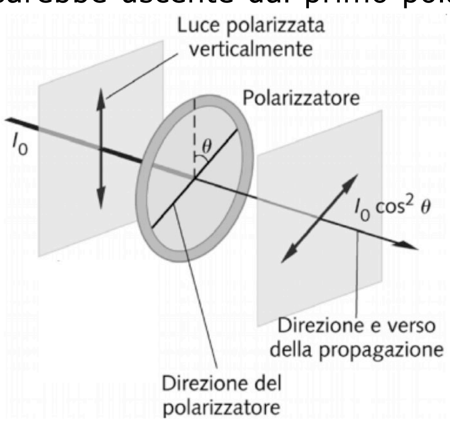
Quesito



Un raggio di luce polarizzata verticalmente incontra due filtri polarizzatori, come mostrato in figura. Calcola l'intensità trasmessa in ognuno dei tre casi, assumendo che l'intensità incidente sia $I_0=37\ W/m^2$.

Soluzione

Nei casi A e B, entrambi i polarizzatori sono a 45° rispetto al fascio incidente, che sarebbe uscente dal primo polarizzatore, per cui $I_A=I_B$ in base alla legge di Malus:



$$I_1 = I_0 \cos^2 \theta = 37 \cos^2 45° = 18{,}5\ W/m^2$$
$$I_A = I_B = I_1 \cos^2 \theta = 18{,}5 \cos^2 45° = 9{,}25\ W/m^2$$

Nel caso C il secondo polarizzatore è a 90° rispetto al fascio incidente, che sarebbe uscente dal primo polarizzatore, e in base alla legge di Malus l'intensità I_C trasmessa è nulla:

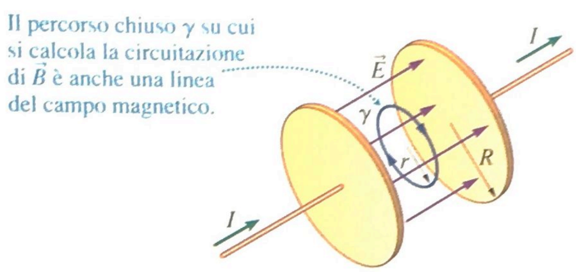
$$I_1 = I_0 \cos^2 \theta = 37 \cos^2 45° = 18{,}5\ W/m^2$$
$$I_C = I_1 \cos^2 \theta = 18{,}5 \cos^2 90° = 0\ W/m^2$$

PROBLEMI

Problema

Un condensatore è costituito da armature circolari di raggio R=1,0 cm e distanti tra loro d=1,0 mm. Se la carica del condensatore aumenta di 0,50 C al secondo, qual è l'intensità del campo magnetico all'interno del condensatore in un punto posto a 0,50 cm dall'asse?

Soluzione



Dall'elettrostatica sappiamo che il campo elettrico fra le armature di un condensatore è costante ed uniforme e la sua intensità è:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi R^2}$$

Noto il campo elettrico, possiamo calcolare il suo flusso attraverso una superficie chiusa. Per ragioni geometriche, come superficie chiusa scegliamo la superficie delimitata dalla circonferenza γ di raggio r:

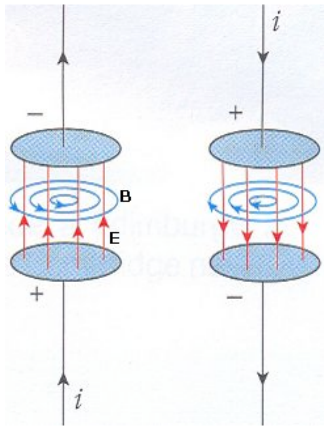
$$\Phi(\vec{E}) = E \cdot A = E \cdot \pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi R^2} \cdot \pi r^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

La carica del condensatore, variando nel tempo (aumenta di 0,50 C/s), provoca una variazione di tale flusso attraverso la superficie in oggetto è:

$$\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{r^2}{\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

Dalla quarta equazione di Maxwell:

$$C(\vec{B}) = \mu_0 \left[i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right] = \mu_0 (i + i_s) \qquad (1)$$



si deduce che una variazione del flusso del campo elettrico genera un campo magnetico. Cioè, la corrente di spostamento i_s produce un effetto magnetico al pari della corrente dovuta al movimento delle cariche. Dobbiamo perciò pensare che nella

regione di spazio compreso fra le armature del condensatore abbia origine un campo magnetico. Le linee di forza del campo magnetico generato dalla corrente di spostamento sono pertanto circolari e con centro sull'asse di simmetria del condensatore (proprio come accade al campo magnetico generato da un filo percorso da corrente).
A questo punto abbiamo tutti gli elementi per calcolare il campo magnetico all'interno del condensatore, attraverso l'applicazione della quarta equazione di Maxwell, in particolare attraverso la conoscenza della corrente di spostamento. Cominciamo con il calcolare la circuitazione del campo **B** prendendo come percorso chiuso la circoferenza γ di raggio r=0,50 cm, pari alla distanza dall'asse alla quale si deve determinare il modulo di **B**, e che coincide proprio con una linea del campo magnetico:

$$C(\vec{B}) = \Sigma\vec{B} \bullet \Delta\vec{s} = B \cdot 2\pi r$$

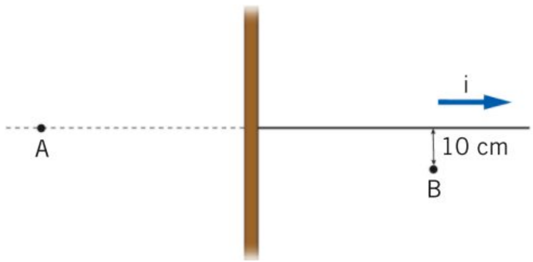
e quindi, grazie all'applicazione della (1), si ottiene il modulo di **B**:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{r^2}{\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{dQ}{dt} = \mu_0 \frac{r^2}{\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{dQ}{dt} \xrightarrow{da\ cui}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{5{,}0 \cdot 10^{-3}}{(1{,}0 \cdot 10^{-2})^2} \cdot 0{,}50 = 5{,}0 \cdot 10^{-6}\ T$$

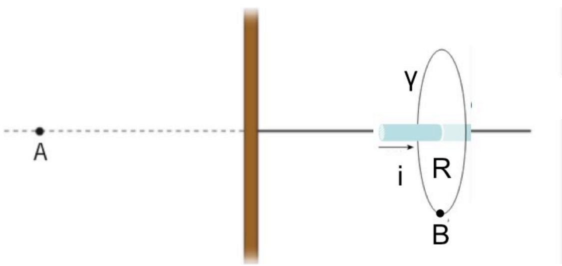
Problema

Una superficie piana quadrata di lato L=15,0 m e di spessore d=1,0 cm che inizialmente porta una carica Q_0=1,0 mC si scarica con una corrente continua in t=1,0 μs attraverso un filo rettilineo. Il filo è collegato al centro della superficie piana.



Il punto B dista 10 cm dal filo conduttore. Calcola il modulo del campo magnetico indotto nei punti A e B.

Soluzione



Consideriamo come cammino chiuso, su cui calcolare la circuitazione del campo magnetico, una circonferenza γ centrata sul filo e di raggio 10 cm passante per B, su un piano parallelo alla superficie quadrata.

La circuitazione del campo magnetico è data dalla quarta equazione di Maxwell:

$$C_\gamma(\vec{B}) = \mu_0\left[i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}\right] = \mu_0(i + i_s)$$

Per il calcolo della circuitazione ci sono due contributi:

- la corrente i concatenata al percorso chiuso lungo il quale si calcola la circuitazione, dovuta allo spostamento di cariche lungo il conduttore durante la fase di scarica della superficie piana;
- la corrente di spostamento i_s dovuta alla variazione del flusso di campo elettrico attraverso la superficie γ, in seguito alla scarica della superficie piana.

Cominciamo a calcolare il modulo del campo elettrico, in funzione del tempo, generato dalla scarica della superficie piana. Utlizzando la relazione nota dall'elettrostatica, si ha:

$$E(t) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q(t)}{A} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q(t)}{L^2}$$

Sappiamo che la superificie piana, inizialmente con carica Q_0, si scarica con una corrente continua (legge lineare) attraverso il filo rettilineo:

$$Q(t) = Q_0 - it$$

e che per defінzione la corrente è data da:

$$i = \frac{Q}{\Delta t}$$

per cui:

$$E(t) = \frac{Q_0 - it}{2\varepsilon_0 L^2} = \frac{Q_0 - \left(\frac{Q_0}{\Delta t}\right)t}{2\varepsilon_0 L^2} = \frac{Q_0}{2\varepsilon_0 L^2}\left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)$$

Adesso possiamo applicare la quarta equazione di Maxwell per calcolare il modulo del campo magnetico indotto nei punti A e B.

- Poiché il punto A non è interessato da nessuna variazione di flusso di campo elettrico, né, tantomeno è sede di corrente elettrica, in esso non viene indotto nessun campo magnetico, quindi B=0.

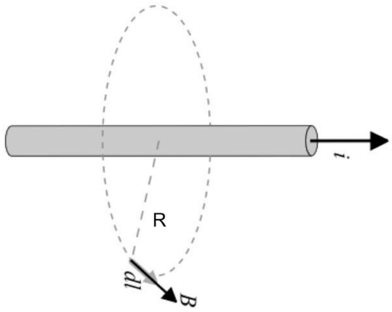
- La corrente i nel filo e concatenata con γ è data da:

$$i = \frac{Q}{\Delta t}$$

La corrente di spostamento i_s concatenata con γ è data da:

$$i_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d(E(t)S)}{dt} = \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{d(E(t))}{dt} = \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{Q_0}{2\varepsilon_0 L^2}\left(1-\frac{t}{\Delta t}\right) = \frac{Q_0 \pi R^2}{2L^2 \Delta t}$$

La circuitazione del campo magnetico lungo γ vale:



$$C_\gamma(\vec{B}) = \Sigma \vec{B} \bullet \Delta \vec{l} = 2\pi R B$$

Pertanto, la quarta equazione di Maxwell assume la forma:

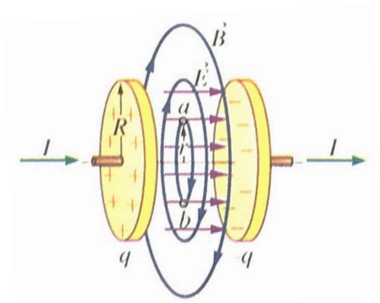
$$2\pi R B = \mu_0 \left(\frac{Q_0}{\Delta t} - \frac{Q_0 \pi R^2}{2L^2 \Delta t}\right)$$

da cui ricaviamo il modulo del campo magnetico nel punto B:

$$B = \frac{\mu_0 Q_0}{2\pi R \Delta t}\left(1-\frac{\pi R^2}{2L^2}\right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-6}}\left(1-\frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{2 \cdot 15^2}\right) = 2{,}0 \cdot 10^{-3} T$$

Problema

Un condensatore a facce piane parallele è caricato come in figura. Le armature circolari hanno raggio R=4,00 cm e, in un determinato istante, la corrente di conduzione nel filo è 0,280 A.



Calcola:

1. la densità della corrente di spostamento nell'aria, nello spazio compreso fra le armature;
2. il valore della rapidità di variazione del campo elettrico;
3. il campo magnetico indotto fra le armature alla distanza di 2,00 cm e 1,00 dall'asse.

Supponi che le armature del condensatore abbaino una superficie di 3,00 cm² e siano separate da uno strato di dielettrico dello spessore di 2,50 mm che riempie completamente lo spazio fra esse. Il dielettrico ha costante dielettrica relative pari a 4,70. In un determinato istante la ddp fra le armature è di 120 V e la corrente di carica del condensatore è pari a 6,00 mA.

In questo istante calcola:

4. la carica presente su ogni armature;
5. la corrente di spostamento nel dielettrico.

Soluzione

1) Si dimostra che la corrente di spostamento è numericamente uguale alla corrente che circola nel conduttore. Quindi tutto avviene come se la corrente elettrica proseguisse nello spazio vuoto tra le armature del condensatore sotto forma di corrente di spostamento, mantenendo invariata la sua intensità. Pertanto:

$$I_s = I$$

quindi, la densità della corrente di spostamento nell'aria, nello spazio compreso fra le armature vale:

$$j_s = \frac{I_s}{A} = \frac{I_s}{\pi R^2} = \frac{0{,}280}{\pi \cdot (4{,}00 \cdot 10^{-2})^2} = 55{,}7\ A/m^2$$

2) Dalla definizione di corrente di spostamento ricaviamo il valore della rapidità di variazione del campo elettrico:

$$I_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{I_s}{\varepsilon_0 A} = \frac{0{,}280}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \pi \cdot (4{,}00 \cdot 10^{-2})^2} = 6{,}3 \cdot 10^{12} V/m \cdot s$$

3) Dalla quarta equazione di Maxwell:

$$C(\vec{B}) = \mu_0 \left[i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right] = \mu_0 (i + i_s) \qquad (1)$$

si deduce che una variazione del flusso del campo elettrico genera un campo magnetico indotto. Cioè, la corrente di spostamento i_s produce un effetto magnetico al pari della corrente dovuta al movimento delle cariche. Dobbiamo perciò pensare che nella regione di spazio compreso fra le armature del condensatore abbia origine un campo magnetico. La circuitazione del campo **B** su un percorso chiuso (circonferenza) di raggio r, pari alla distanza dall'asse alla quale si deve determinare il modulo di **B**, è dato da

$$C(\vec{B}) = \Sigma \vec{B} \bullet \Delta \vec{s} = B \cdot 2\pi r$$

e quindi, grazie all'applicazione della (1), si ottiene l'espressione del modulo del campo **B**:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt}$$

Pertanto, il valore di **B** indotto tra le armature del condensatore alla distanza di 2,00 cm e 1,00 cm dall'asse assume seguenti valori:

$$B(2) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{2} \cdot 2{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot 6{,}3 \cdot 10^{12} = 0{,}70 \ \mu T$$

$$B(1) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{2} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot 6{,}3 \cdot 10^{12} = 0{,}35 \ \mu T$$

4. Per definizione, la capacità di un condensatore dipende dalle sue caratteristiche fisiche e geometriche, per cui nel nostro caso vale:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4{,}7 \cdot \frac{3{,}00 \cdot 10^{-4}}{2{,}50 \cdot 10^{-3}} = 5{,}0 \cdot 10^{-12} F = 5{,}0 \ pF$$

e quindi, la carica accumulata su ogni sua armatura vale:

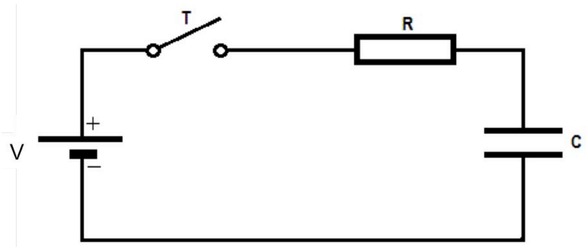
$$Q = CV = 5{,}0 \cdot 10^{-12} \cdot 120 = 600 \cdot 10^{-12} C = 600 \ pC$$

5. Come già detto al punto 1), la corrente di spostamento è numericamente uguale alla corrente che circola nel conduttore:

$$I_s = I = 6{,}00 \ mA$$

Problema

Un circuito in serie è composto da una R=150 Ω, una batteria V=25 V, un interruttore e un condensatore a facce piane parallele, inizialmente scarico, le cui armature hanno A=1,41x10^{-3} m^2 e sono poste a una distanza di 5,0 mm l'una dall'altra. L'interruttore è chiuso all'istante t=0 s. Calcola:



1. Il valore massimo del flusso del campo elettrico e il valore massimo della corrente di spostamento attraverso il condensatore, dopo la chiusura del circuito;
2. Il flusso del campo elettrico e la corrente di spostamento all'istante t=0,50 ns.

Soluzione

1. La capacità di un condensatore a facce piane e parallele si calcola come:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{1{,}41 \cdot 10^{-3}}{5{,}0 \cdot 10^{-3}} = 2{,}5 \cdot 10^{-12} F = 2{,}5 \ pF$$

La ddp, funzione del tempo, che nasce tra le armature del condensatore durante la fase di carica, è espressa dalla seguente legge di tipo esponenziale crescente:

$$V(t) = V_0 (1 - e^{t/\tau}) \qquad dove: \tau = RC$$

Possiamo ritenere il condensatore carico, e quindi massima la tensione V_0 ai suoi capi, dopo un tempo t=5τ:

$$V(t) = V_0 (1 - e^{-t/\tau}) \xrightarrow{t=5\tau} V(t = 5\tau) = V_0$$

Pertanto, possiamo ritenere massimo anche il flusso del campo elettrico dopo un tempo t=5τ. Flusso massimo che calcoliamo con la prima equazione di Maxwell (legge di Gauss):

$$\Phi_{\max}(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \xrightarrow{Q=CV_0} \Phi_{\max}(\vec{E}) = \frac{CV_0}{\varepsilon_0} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-12} \cdot 25}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 7{,}1 \ Nm^2 / C$$

La corrente che circola nel circuito, invece, durante la fase di carica del condensatore, segue una legge di tipo esponenziale decrescente:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \qquad dove: \tau = RC$$

Pertanto, la corrente è massima all'inizio, ossia al tempo t=0:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \xrightarrow{t=0} I_{\max} = I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{25}{150} = 0{,}17 \ \Omega$$

Si dimostra che la corrente di spostamento è numericamente uguale alla corrente che circola nel circuito. Cioè, il tutto avviene come se la corrente elettrica proseguisse nello spazio vuoto tra le armature del condensatore sotto forma di corrente di spostamento, mantenendo invariata la sua intensità. Pertanto:

$$I_{s_{\max}} = I_{\max} = 0{,}17 \ A$$

2. Per calcolare il flusso del campo elettrico e la corrente di spostamento all'istante t=0,50 ns, dobbbiamo utilizzare le relazioni funzioni del tempo per V(t) e I(t):

$$\Phi(\vec{E})_{t=0{,}50} = \frac{CV_0}{\varepsilon_0}(1 - e^{-t/\tau}) = 7{,}1 \cdot (1 - e^{-0{,}50/0{,}38}) = 5{,}2 \ Nm^2 / C$$

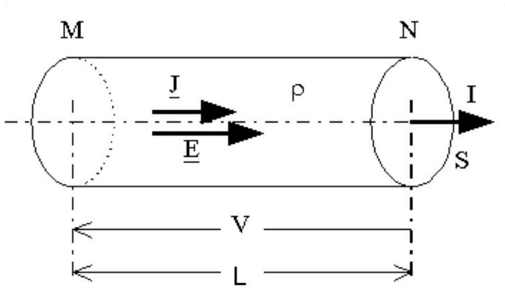
$$\tau = RC = 150 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-12} = 375 \cdot 10^{-12} \ s = 0{,}38 \ ns$$

$$I_s(t) = I_0 e^{-t/\tau} = 0{,}17 \cdot e^{-0{,}50/0{,}38} = 0{,}046 \ A = 46 \ mA$$

Problema

Un lungo filo sottile di rame (ρ=2,0x10^{-8} Ωm) con sezione 2,1 mm^2 è attraversato da una corrente di 16 A.

1. Qual è il campo elettrico uniforme nel materiale?
2. Se la corrente varia al ritmo di 4000 A/s, qual è la rapidità di variazione del campo elettrico?
3. Con riferimento al punto precedente, qual è la densità della corrente di spostamento nel materiale? (Si ponga ε_r=1)
4. Se la corrente varia come illustrato al punto 3), qual è il modulo del campo magnetico a una distanza di 6 cm dal centro del filo?



Soluzione

1. Per la prima e seconda legge di Ohm, possiamo scrivere:

$$V = RI = \rho \frac{L}{S} I$$

Ma la tensione V è legata al campo elettrico E interno al conduttore dalla relazione:

$$V = EL$$

quindi, in definitiva, il campo elettrico uniforme nel conduttore vale:

$$EL = \rho \frac{L}{S} I \Rightarrow E = \rho \frac{I}{S} = 2{,}0 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{16}{2{,}1 \cdot 10^{-6}} = 0{,}15\ V/m$$

2. Nota l'espressione del campo elettrico ricavata al punto 1), e la variazione dI/dt della corrente, la rapidità di variazione dE/dt del campo elettrico vale:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\rho}{S} \frac{dI}{dt} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-8}}{2{,}1 \cdot 10^{-6}} \cdot 4000 = 38\ V/ms$$

3. La densità di corrente è definita come:

$$j = \frac{I}{S}$$

quindi, la densità della corrente di spostamento all'interno del materiale è:

$$j_s = \frac{I_s}{S} = \frac{1}{S}\varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{1}{S}\varepsilon_0 \frac{d(ES)}{dt} = \frac{1}{S}\varepsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 38 = 3{,}4 \cdot 10^{-10}\, A/m^2$$

4. Usiamo la quarta equazione di Maxwell per calcolare il campo magnetico a una distanza di 6 cm dal centro del filo:

$$C(\vec{B}) = \mu_0 \left[I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right] \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \left[I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right]$$

Poichè la corrente di spostamento è molto più piccola di quella di conduzione (ci sono 11 ordini du grandezza di differenza), possiamo trascurarla nell'equazione precedente, per cui si ottiene:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \;\Rightarrow\; B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 16}{2\pi \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = 5{,}3 \cdot 10^{-5} T$$

Problema

Il campo elettrico di un'onda piana unidimensionale è descritto dalla seguente equazione:

$$E(x,t) = 10\cos(\omega t - kx + \phi)$$

Determina il valore di E(x,t) e di B(x,t) all'istante t_1=20 μs e a una distanza $x_1=10^4$ m. I parametri dell'onda sono: f=100 MHz; E(0,0)=0; c=3x10^8 m/s.

Soluzione

Sfruttiamo la condizione iniziale E(0,0)=0 per trovare la fase iniziale dell'onda:

$$E(0,0) = 0 \;\Rightarrow 10\cos(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \phi) = 0 \;\rightarrow \cos\phi = 0 \;\Rightarrow\; \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Nota la frequenza e la velocità di propagazione dell'onda, determiniamo gli altri parametri, come la lunghezza d'onda, il numero d'onda e la pulsazione:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{10^8} = 3\ m \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2}{3}\pi\ rad/m \qquad \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^8 rad/s$$

L'ampiezza del campo elettrico $E(x_1,t_1)$ all'istante t_1=20 μs e a una distanza $x_1=10^4$ m, vale:

$$E(x_1,t_1)=10\cos\left(2\pi\cdot 10^8\cdot 20\cdot 10^{-6}-\frac{2}{3}\pi\cdot 10^4+\frac{\pi}{2}\right)=-8,66\ V/m$$

Dalla relazione che lega i moduli del campo elettrico e magnetico, si ricava il modulo di $B(x_1,t_1)$:

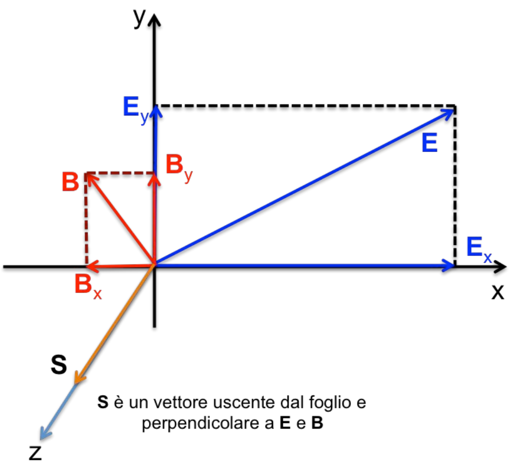
$$E=cB\ \Rightarrow\ B(x_1,t_1)=\frac{E(x_1,t_1)}{c}=\frac{-8,77}{3,00\cdot 10^8}=-2,92\cdot 10^{-8}\ T$$

Problema

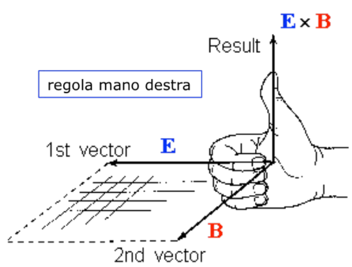
In un particolare istante, il campo elettrico **E** di un fascio di luce che sta viaggiando nel verso positivo dell'asse z ha componenti E_x=6,22 N/C e E_y=2,87 N/C. Nello stesso istante il campo magnetico nel fascio ha modulo B=2,28x10^{-8} T.

1. Nell'istante considerato la componente z del campo elettrico e magnetico è positiva, negativa o nulla? Giustifica la risposta.
2. Esprimi il campo magnetico **B** in termini di componenti.
3. Calcola l'intensità dell'onda elettromagnetica.

Soluzione



3. L'onda elettromagnetica si propaga lungo l'asse z, ed essendo un'onda trasversale, il vettore campo elettrico e magnetico sono perpendicolari tra loro e, a loro volta, perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda. Pertanto, i vettori **E** e **B** hanno componente nulla lungo z.
4. Le componenti del vettore **E** sono entrambe positive, per cui le componenti di **B**, che è perpendicolare ad **E**, non possono che essere quelle in figura, ossia $\mathbf{B}_x$ positiva e $\mathbf{B}_y$ negativa, affinchè l'onda si propaghi lungo l'asse positivo di z come richiesto dal problema. In questo modo, è rispettata la regola della mano destra per identificare la direzione di propagazione dell'onda.



Dalla relazione che lega i moduli del campo elettrico e magnetico:

$$E=cB\ \rightarrow\ B=\frac{E}{c}$$

e sapendo che le component x e y del campo magnetico sono proprzionali alle component y e x del campo elettrico si ottiene:

$$B_x = -\frac{E_y}{c} = -\frac{2,87}{3,00 \cdot 10^8} = -0,96 \cdot 10^{-8} T \qquad B_y = \frac{E_x}{c} = -\frac{6,22}{3,00 \cdot 10^8} = 2,1 \cdot 10^{-8} T$$

4. L'intensità dell'onda elettromagnetica è uguale al modulo del vettore di Poynting **S**:

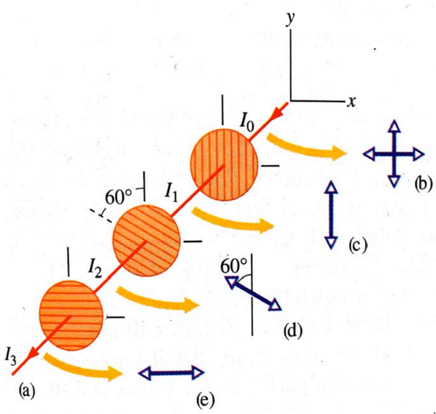
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \otimes \vec{B} \xrightarrow[\cos\vartheta = 1]{\vec{E} \ e \ \vec{B} \ sono \ perpendicolari} I = S = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} (6,85 \cdot 2,28 \cdot 10^{-8}) = 0,124 \ W/m^2$$

dove:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{6,22^2 + 2,87^2} = 6,85 \ N/C$$

Problema

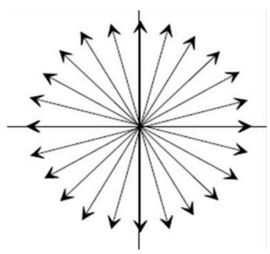
La figura mostra una serie di tre lamine polarizzanti sul percorso di un fascio di luce inizialmente non polarizzato. La prima lamina ha direzione di polarizzazione parallela all'assey; la seconda è ruotata di 60° in senso antiorario rispetto alla prima; la terza ha direzione di polarizzazione parallela all'asse x. Determinare:

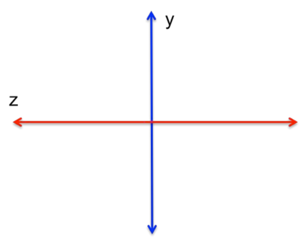


a) la frazione dell'intensità originaria I_0 che emerge dal sistema;
b) la polarizzazione del fascio emergente.

Soluzione

a) Esaminiamo una lamina alla volta. Il fascio originario non è polarizzato (fig b). Un'onda non polarizzata può essere vista come la sovrapposizione di due onde piane polarizzate, l'una perpendicolare all'altra. Disponiamo l'asse y parallelo alla direzione di polarizzazione della lamina: le componenti y passeranno, mentre quelle z saranno assorbite. Se in origine la luce non è polarizzata, significa che le onde sono orientate in modo casuale, per cui la somma delle componenti y e la somma di quelle z sono uguali. Pertanto, se le

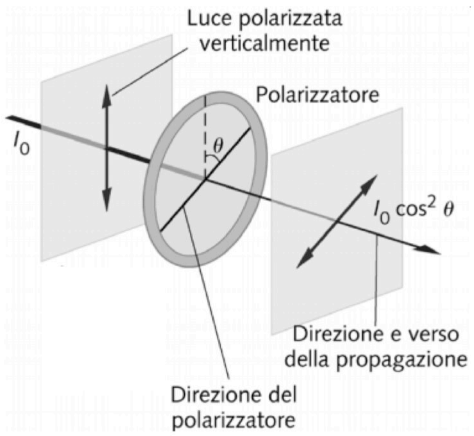




componenti z sono assorbite metà dell'intensità originale I_0 viene perduta. In conclusione, l'intensità che emerge dalla prima lamina è:

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

e la polarizzazione del fascio è quella della prima lamina, ossia verticale (fig c).



Adesso la luce che incide sulla seconda lamina è polarizzata, per cui l'intensità emergente è regolata dalla legge di Malus:

$$I_2 = I_1 \cos^2\theta = \frac{I_0}{2}\cos^2 60° = \frac{I_0}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{I_0}{2}\frac{1}{4} = \frac{I_0}{8}$$

La polarizzazione di questo fascio è parallela alla direzione di polarizzazione della seconda lamina e quindi anch'essa ruotata di 60° in senso orario rispetto all'asse y (fig d).

Poiché questo fascio è ancora polarizzato, applichiamo di nuovo la legge di Malus per determinare l'intensità emergente dalla terza lamina. Poiché la polarizzazione del fascio è 60° rispetto all'asse y e la direzione di polarizzazione della terza lamina è parallela all'asse x, allora l'angolo tra la polarizzazione del fascio e il piano privilegiato di polarizzazione della terza lamina è di 30°, quindi:

$$I_3 = I_2 \cos^2\theta = \frac{I_0}{8}\cos^2 30° = \frac{I_0}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{I_0}{8}\frac{3}{4} = \frac{3}{32}I_0$$

In conclusione, la frazione dell'intensità originaria I_0 che emerge dalla sistema è:

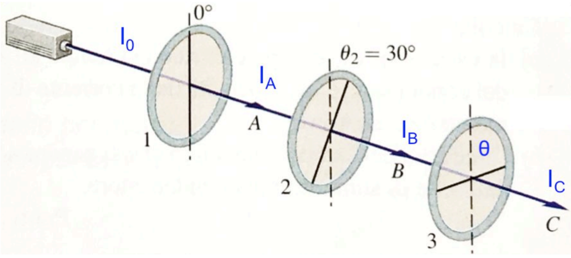
$$I_3 = \frac{3}{16}I_0 \Rightarrow \frac{I_3}{I_0} = \frac{3}{32} = 0{,}094 = 9{,}4\%$$

Solo il 9,4% dell'intensità della luce non polarizzata incidente supera tutti e tre gli stadi.

b) La luce che emerge dal sistema è polarizzata orizzontalmente, ossia secondo la direzione di polarizzazione della terza lamina (fig e).

Problema

Un laser a elio-neon emette un fascio di luce non polarizzata che passa attraverso tre filtri Polaroid come in figura:



a) Esprimi l'intensità trasmessa in funzione di θ;
b) Rappresenta graficamente l'intensità trasmessa in funzione di θ e determina la massima intensità trasmessa;
c) A quale angolo θ si ha la massima trasmissione?

Soluzione

a) Il fascio di luce emesso dal laser non è polarizzato, e per le considerazioni fatte nel problema precedente, l'intensità che emerge dalla prima lamina è:

$$I_A = \frac{I_0}{2}$$

e la polarizzazione del fascio è quella della prima lamina, ossia verticale (fig c).
Adesso la luce che incide sulla seconda lamina è polarizzata, per cui l'intensità emergente è regolata dalla legge di Malus:

$$I_B = I_A \cos^2 30° = \frac{I_0}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} I_0$$

Poiché questo fascio è ancora polarizzato, applichiamo di nuovo la legge di Malus per determinare l'intensità emergente dalla terza lamina. Poiché la polarizzazione del fascio è 30° rispetto all'asse y e la direzione di polarizzazione della terza lamina è θ, allora l'angolo tra la polarizzazione del fascio e il piano privilegiato di polarizzazione della terza lamina è di (θ - 30°), quindi:

$$I_C = I_B \cos^2(\theta - 30°) = \frac{3}{8} I_0 \cos^2(\theta - 30°)$$

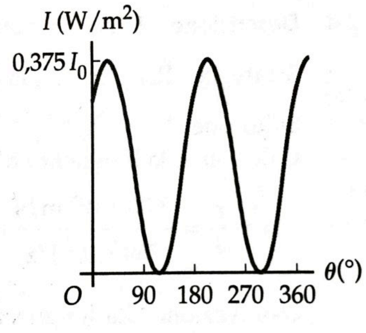
b) Il massimo valore di I_C si ha per:

$$\cos^2(\theta - 30°) = 1$$

e vale:

$$I_C = \frac{3}{8} I_0 = 0{,}375 I_0 = 37{,}5\%\ di\ I_0$$

Graficamente, l'intensità trasmessa segue l'andamento del $\cos^2(\theta - 30°)$.



c) Il massimo valore di I_C si ha per il seguente valore di θ:

$$\cos^2(\theta - 30°) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \theta - 30° = 0 \rightarrow \theta = 30° \\ \theta - 30° = 180° \rightarrow \theta = 210° \end{cases}$$