Esercizi sulla caduta libera - 2

1.5.1 In un cantiere una chiave inglese, lasciata cadere inavvertitamente, arriva al suolo alla velocità di $24\,m/s$. (a) Da che altezza è caduta? (b) quanto tempo impiegato a cadere?

Caso (a): supponendo che la chiave inglese fosse appogiata e quindi avesse velocità nulla, possiamo applicare la relazione $v_f^2 = 2gh$, dove h è la distanza dal suolo. Si ha quindi

$$h = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{24^2\,\frac{m^2}{s^2}}{2\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}} = 29.4\,m$$

Caso (b): per determinare il tempo di caduta, essendo un moto uniformemente accelerato, si può applicare la relazione $v_f - v_i = a\,\triangle t$, da cui

$$\triangle t = \frac{24\,\frac{m}{s}}{9.8\,\frac{m}{s^2}} = 2.45\,s$$

1.5.2 (a) Con quale velocità deve essere lanciata verticalmente una palla per arrivare ad un'altezza massima di $50m$? (b) Per quanto tempo rimarrà in aria? (c) Tracciare le curve indicative $y(t)$, $v(t)$, $a(t)$.

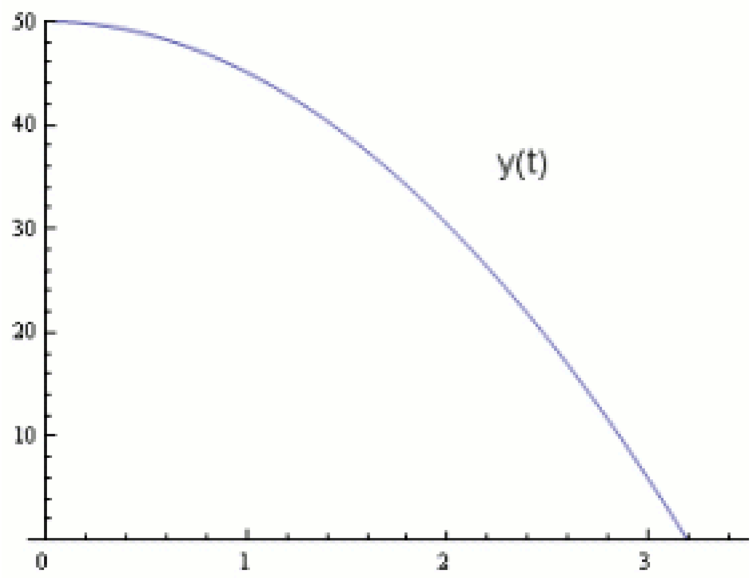
Caso (a): Possiamo utilizzare la relazione $v_f^2 = v_0^2 - 2gh$, dove il segno negativo indica il verso del moto opposto all'accelerazione di gravità; in tale caso la $v_f = 0$, perché salendo la palla rallenta fino a raggiungere l'altezza massima dove la velocità si annulla. Risolvendo rispetto a v_0 si ha

$$v_0^2 = 2gh \quad da\,cui \quad v_0 = \sqrt{2\cdot 9.81\,\frac{m}{s^2}\cdot 50\,m} = 31.3\,\frac{m}{s}$$

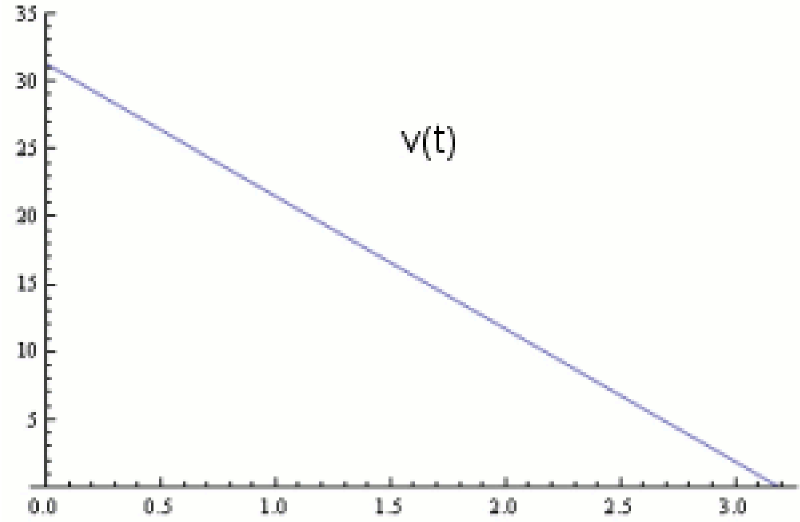
Caso (b): il tempo di volo può essere calcolato supponendo che una volta giunta all'altezza massima, la palla ridiscenda riacquistando la velocità che aveva all'inizio.

$$\triangle t_{salita} = \frac{31.3\,\frac{m}{s}}{9.81\,\frac{m}{s^2}} = 3.2\,s \quad per\,cui \quad t_{volo} = 2\cdot 3.2\,s = 6.4\,s$$

Caso (c): il grafico $y(t)$ è un grafico spazio tempo di un moto uniformemente decelerato:



il grafico $v(t)$ esprime la variazione lineare della velocità al passare del tempo



il grafico $a(t)$ è invece una retta parallela all'asse delle ascisse.

1.5.3 Da una nuvola a $1700m$ sopra la superficie terrestre cadono gocce di pioggia. Se non fossero rallentate dalla resistenza dell'aria, a che velocità arriverebbero al suolo?

Soluzione: i dati assegnati si riferiscono alla velocità iniziale, che supponiamo nulla, alla distanza da percorrere; non si hanno informazioni sul tempo di percorrenza. Risulta quindi naturale fare riferimento alla relazione $v_f^2 = v_i^2 - 2gh$, da cui sostituendo

$$v_f = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1700m} = 182.6 \frac{m}{s}$$

come si può notare è una velocità estremamente elevata, pari a oltre $600 km/h$.

1.5.4 In un cantiere si rompe l'unico cavo che sostiene un montacarichi vuoto fermo in cima a un edificio alto $120m$. (a) A che velocità ca a sbattere al suolo? (b) per quanto tempo è caduto? (c) al passaggio a metà altezza qual era la sua velocità, e (d) da quanto tempo stava cadendo?

Caso (a): il problema è identico a quello precedente, per cui

$$v_f = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 120m} = 48.5 \frac{m}{s}$$

Caso (b): per calcolare il tempo, utilizziamo la legge delle velocità del moto uniformemente accelerato, per cui

$$\triangle t = \frac{\triangle v}{g} = \frac{48.5 \frac{m}{s} - 0}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 4.95 s$$

Caso (c): il calcolo della velocità a metà percorso è identico a quello per il percorso intero, essendo un moto di tipo uniformemente accelerato

$$v_{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 60m} = 34.3 \frac{m}{s}$$

Caso (d): lo stesso vale anche per il tempo impiegato

$$\triangle t = \frac{\triangle v}{g} = \frac{34.3\,\frac{m}{s} - 0}{9.81\,\frac{m}{s^2}} = 3.5\,s$$

1.5.5 Una pietra viene scagliata in basso alla velocità di $12.0\,m/s$ dal tetto di un edificio posto a $30.0\,m$ dal suolo. (a) Quanto tempo impiega ad arrivare al suolo? (b) Qual è la sua velocità all'impatto col terreno?

Caso (a): conosciamo la velocità iniziale, la distanza da percorrere e l'accelerazione alla quale il corpo è soggetto e che va ad aumentare la velocità durante la discesa; rimane come incognita il tempo, per cui $s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$, sostituendo i valori si ha

$$30\,m = 12.0\,\frac{m}{s} \cdot t + 4.9\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

risolvendo l'equazione di secondo grado in t, trascurando la radice negaiva, si ha

$$t_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 120 \cdot 4.9}}{9.8} = 1.53\,s$$

Caso (b): come per i casi precedenti la relazione che le grandezze assegnate nel testo è $v_f^2 = v_0^2 + 2gh$; (sono possibili altri metodi, come per esempio quello basato sull'uso della definizione di accelerazione $a = \frac{v_f - v_i}{\triangle t}$) in questo caso basta sostituire i valori assegnati per ottenere

$$v_f^2 = (12.0)^2\,\frac{m^2}{s^2} + 2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 30\,m = 27\,\frac{m}{s}$$

1.5.6 Da una torre alta $145\,m$ si lascia cadere nel vuoto una sfera del diametro di $1\,m$. (a) Per quanto tempo la sfera rimane in caduta libera? (b) qual è la sua velocità quando tocca il fondo della torre? (c) quando colpisce il fondo, mentre la sua velocità si annulla la sfera subisce una decelerazione media pari a $25g$. (d) Di quale distanza si sposta il baricentro durante la decelerazione?

Caso (a): la sfera parte con velocità nulla per cui è possibile usare la relazione contenente la distanza da percorrere, l'accelerazione e con il tempo come incognita $h = \frac{1}{2} g t^2$; risolvendo rispetto a t si ha

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 145\,m}{9.8\,\frac{m}{s^2}}} = 5.44\,s$$

Caso (b): essendo la velocità iniziale nulla, la velocità finale può essere ottenuta da $v_f = \sqrt{2gh}$

$$v_f = \sqrt{2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 145\,m} = 53.3\,\frac{m}{s}$$

Caso (c): nel caso di una sfera la cui massa è distribuita in modo uniforme, il baricentro è posto nel centro. Avendo la sfera raggio $0.5\,m$ essa toccherà terra quando il suo baricentro disterà ancora $0.5\,m$ dal suolo. Consideriamo pertanto il moto di un punto, il baricentro, soggetto ad una decelerazione di $25g$, la cui velocità iniziale è pari a $53.3\,\frac{m}{s}$ e quella finale a $0\,\frac{m}{s}$. Avremo

$$0^2\,\frac{m^2}{s^2} = 53.3^2\,\frac{m^2}{s^2} - 2\cdot 25\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot h$$

da cui

$$h = \frac{53.3^2}{50\cdot 9.8} = 5.8\,m$$

1.5.7 Si lascia cadere una pietra da un dirupo alto $100\,m$. Quanto tempo impiega per cadere (a) per i primi $50\,m$ e (b) per i restanti $50\,m$?

Caso (a): consideriamo nulla la velocità iniziale della pietra. Quindi $h = \frac{1}{2}gt^2$ da cui

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 50\,m}{9.8\,\frac{m}{s^2}}} = 3.2\,s$$

Caso (b): la relazione precedente non può più essere utilizzata nello stessa forma, perchè dopo aver percorso $50\,m$, la pietra non h più una velocità nulla, ma pari a $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 50\,m} = 31.3\,\frac{m}{s}$. Al termine della caduta la velocità sarà, ancora per la stessa relazione, $v = \sqrt{2\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 100\,m} = 44.3\,\frac{m}{s}$. Avendo calcolato la velocità a metà strada e quella finale, possiamo ottenere il tempo degli ultimi $50\,m$ con la relazione $h = \frac{v_{\frac{1}{2}}+v_f}{2}t$

$$t = \frac{2h}{v_{\frac{1}{2}}+v_f} = \frac{2\cdot 50\,m}{(44.3+31.3)\,\frac{m}{s}} = 1,3\,s$$

come si può notare il tempo dei secondi $50\,m$ e più breve, perchè essendo un moto uniformente accelerato, la velocità cresce linearmente con il tempo durante la caduta.

1.5.8 Un animale fa un salto verso l'alto elevandosi in modo da passare all'altezza di $0.544\,m$ dopo $0.200\,s$. (a) Qual era la sua velocità iniziale? (b) Qual è la sua velocità a quella altezza dal suolo? (c) Quanto più in alto può arrivare?

Caso (a): anche se non viene esplicitato, dobbiamo supporre che il salto avvenga lungo la verticale al suolo; in questo caso l'incognita è la velocità iniziale, noti distanza e tempo e ovviamente accelerazione; si ha dunque $h = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$ (il segno negativo sta ad indicare che la velocità iniziale tende a diminuire sotto l'azione della gravità), per cui

$$v_0 = \frac{h - \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{0.544\,m - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot(0.200\,s)^2}{0.200\,s} = 3.7\,\frac{m}{s}$$

Caso (b): per calcolare la sua velocità utilizziamo la relazione che lega le velocità iniziale e finale con la distanza percorsa $v_f^2 = v_0^2 - 2gh$

$$v_f = \sqrt{3.7\,\frac{m}{s} - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot 0.544\,m} = 1.74\,\frac{m}{s}$$

Caso (c): la domanda fa supporre che lo slancio dell'animale consenta un salto più alto e che $0.544\,m$ sia una posizione intermedia; in questo calcoliamo osservando che, al raggiungimento della posizione massima, la velocità finale posseduta dall'animale sarà nulla; per cui applicando la stessa relazione del caso precedente, con incognita l'altezza h, si ha

$$h = \frac{v_0^2 - v_f^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(3.7\,\frac{m}{s}\right)^2 - 0^2}{2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}} = 0.698\,m$$

(dove si calcola $v_0^2 - v_f^2$ per tenere conto del segno negativo davanti all'incognita h). Il valore di $0.698\,m$ rappresenta l'altezza massima raggiungibile, per cui, rispetto alla posizione precedene a $0.544\,m$ dal suolo, l'animale potrà percorrere nel salto ancora una distanza pari a

$$\triangle h = 0.698\,m - 0.544\,m = 0.154\,m$$

1.5.9 Un oggetto cade in acqua da un'altezza di $45\,m$. Cade direttamente in una barchetta in moto uniforme rettilineo che si trova a $12\,m$ dal punto di impatto al momento in cui l'oggetto viene lasciato cadere. Qual era la velocità della barca?

Soluzione: se i due oggetti vengono ad impattare, significa che il corpo in caduta (moto uniformemente accelerato) percorrerà in verticale i $45\,m$ nello stesso intervallo di tempo impiegato dalla barca a percorrere $12\,m$ orizzontalmente con moto rettilineo uniforme. Calcolo pertanto il tempo di caduta e lo utilizzo per calcolare la velocità costante con cui la barca percorre i $12\,m$.
Tempo per percorrere $45\,m$ con partenza da fermo: da $h = \frac{1}{2}gt^2$ si ha, sostituendo i valori numerici e risolvendo rispetto a t, $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 45\,m}{9.8\,\frac{m}{s^2}}} = 3.03\,s$.
Velocità della barca: se percorre $12\,m$ in $3.03\,s$, la sua velocità sarà, $v = \frac{12\,m}{3.03\,s} = 4\,\frac{m}{s}$

1.5.10 Un razzo viene lanciato verticalmente e sale per $6.00\,s$ con accelerazione costante di $4.00\,\frac{m}{s^2}$. Dopo questo tempo finisce il carburante e prosegue come un corpo in caduta libera. (a) Qual è la massima altezza raggiunta? (b) Quanto tempo impiega dal decollo all'atterraggio?

Caso (a): calcoliamo prima la distanza che il razzo percorre durante la fase di accelerazione; da (sempre con $v_0 = 0$) $h = \frac{1}{2}at^2$, si ha

$$h_1 = \frac{1}{2} 4.00\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(6.00\,\frac{m}{s}\right)^2 = 72.00\,m$$

dopo tale intervallo di tempo in cui il moto era accelerato, ha raggiunto la velocità

$$v = at = 4.00\,\frac{m}{s^2} \cdot 6.00\,\frac{m}{s} = 24.00\,\frac{m}{s}$$

il razzo ha poi proseguito la sua corsa con moto decelerato, sotto l'effetto dell'accelerazione g, che ha ridotto la velocità di $24\,\frac{m}{s}$ fino a zero. La distanza percorsa in questo intervallo può essere così ottenuta, $v_f^2 = v_i^2 - 2gh$, da cui

$$h_2 = \frac{\left(24\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}} = 29.4\,m$$

il tratto percorso in verticale sarà quindi

$$h_{tot} = 72.00\,m + 29.4\,m = 101.4\,m$$

Caso (b): il tempo per percorrere i primi $72\,m$ è assegnato pari a $t_1 = 6.00\,s$; calcoliamo il tempo impiegato a percorrere i $29.4\,m$ in moto decelerato, utilizzando la relazione $h = \frac{1}{2}(v+v_0)\,t_2$:

$$t_2 = \frac{2 \cdot 29.4\,m}{(24+0)\,\frac{m}{s}} = 2.45\,s$$

calcoliamo infine il tempo di ricaduta da un'altezza complessiva di $101.4\,m$ mediante la consueta relazione $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$,

$$t_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 101.4\,m}{9.8\,\frac{m}{s^2}}} = 4.55\,s$$

Da tutto ciò risulta che il tempo complessivo è la somma dei tre tempi relativi ai diversi comportamenti del razzo

$$t_{tot} = (6.00 + 2.45 + 4.55)\,s = 13.00\,s$$

Il moto complessivo è scomponibile, come visto, in tre moti: un primo tratto di moto accelerato verso l'alto, fino all'esaurimento del carburante; un secondo tratto, sempre di salita, con moto però decelerato, e un terzo tratto di caduta con moto accelerato verso il basso.

1.5.11 Un giocatore di basket, fermo vicino al canestro, salta verticalmente fino ad un'altezza di $76.0\,cm$. (a) Per quanto tempo il giocatore si trova nei $15\,cm$ superiori del salto (tra $61.0\,cm$ e $76.0\,cm$) e (b) per quanto tempo invece nei $15\,cm$ inferiori?

Caso (a): è utile calcolare prima la velocità iniziale, quella cioè con cui viene spiccato il salto, sapendo che la velocità finale sarà nulla (infatti il cestista dopo aver raggiunto l'altezza massima, ricade). Tramite la solita relazione $v_f^2 = v_0^2 - 2gh$ si ha

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 0.76\,m} = 3.86\,\frac{m}{s}$$

allo stesso modo possiamo calcolare la velocità all'altezza di $0.61\,m$:

$$v_{0.61\,m} = \sqrt{2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 0.61\,m} = 1.72\,\frac{m}{s}$$

calcoliamo ora il tempo impiegato a percorrere in salto (verticale) i primi $0.61\,m$ e ad arrivare fino a $0.76\,m$:

$$t_{0.61} = \frac{v - v_0}{g} = \frac{(3.86 - 1.72)\,\frac{m}{s}}{9.8\,\frac{m}{s^2}} = 0.218\,s$$

$$t_{0.76} = \frac{(3.86)\,\frac{m}{s}}{9.8\,\frac{m}{s^2}} = 0.394\,s$$

l'intervallo di tempo sarà pertanto

$$\triangle t = 0.394 - 0.218 = 0.176\,s$$

considerando che il cestista si trova tra queste due distanze sia in fase di salita che di ricaduta, si avrà

$$t_{volo} = 2 \cdot 0.176\,s = 0.352\,s$$

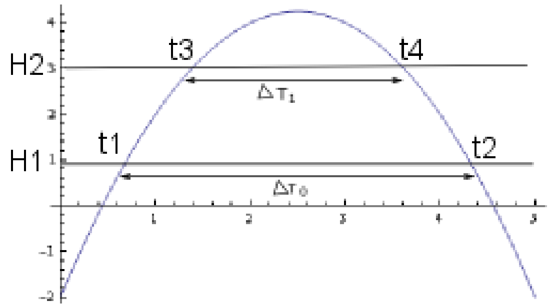
Caso (b): possiamo velocizzare il calcolo, considerando le caratteristiche del moto uniformemente accelerato. Calcoliamo ancora la velocità dopo $15\,cm$, sapendo che la velocità iniziale è quella ottenuta in precedenza, cioè $3.86\,\frac{m}{s}$

$$v_{0.15} = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{\left(3.86\,\frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 0.15\,m} = 3.46\,\frac{m}{s}$$

il tempo compessivo di salita e simmetrica ricaduta è

$$2\triangle t=\frac{(3.86-3.46)\,\frac{m}{s}}{9.8\,\frac{m}{s^2}}=0.082\,s$$

1.5.12 E' possibile eseguire una misurazione di g lanciando verticalmente verso l'alto una sfera di vetro nel vuoto all'interno di una torre e lasciandola poi ricadere. Se $\triangle T_0$ è l'intervallo di tempo tra i due passaggi della sfera a un livello inferiore e $\triangle T_1$ quello fra due passaggi a un livello superiore, e posta H la distanza tra i due livelli, dimostrare la seguente relazione che lega tali grandezze a g (fare riferimento alla figura)



$$g=\frac{8H}{\triangle T_0^2-\triangle T_1^2}$$

Soluzione: la relazione spazio-tempo, mostrata in figura, che caratterizza il moto è tipico di un moto uniformemente accelerato (forma parabolica) con velocità prima decrescente e poi crescente; di conseguenza, essendo la curva continua, si avrà un valore del tempo per il quale la velocità si annulla: tale valore è individuabile nel vertice della parabola. [Ricordiamo che la velocità istantanea può essere vista come il coefficiente angolare (pendenza) della retta tangente alla curva in quel punto e quindi nella prima metà tale valore è positivo e decrescente, nella seconda tale valore è negativo e crescente]. La legge oraria del moto assume in generale la forma $s=s_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$; l'equazione generale di una parabola è $h=c+bt+at^2$, ne risulta che il coefficiente di t^2 vale $-\frac{1}{2}g$.

Ricavo gli altri coefficienti dell'equazione della parabola esprimendoli in funzione dei dati assegnati. Impongo il passaggio della parabola per i punti $(t_1;H_1)$, $(t_3;H_2)$ e so che l'ascissa del vertice vale $t_v=\frac{t_2+t_1}{2}=\frac{t_4+t_3}{2}$ essendo il punto medio dei segmenti $\triangle T_0$ e $\triangle T_1$.

$$\begin{cases} H_1 &= at_1^2+bt_1+c \\ H_2 &= at_3^2+bt_3+c \\ -\frac{b}{2a} &= \frac{t_2+t_1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_1 &= at_1^2-a\,(t_2+t_1)\,t_1+c \\ H_2 &= at_3^2-a\,(t_2+t_1)\,t_3+c \\ b &= -a\,(t_2+t_1) \end{cases}$$

sottraggo la prima equazione dalla seconda e ricavo a

$$H_2-H_1=a\left(t_3^2-t_1^2\right)-a\,(t_2+t_1)\,(t_3-t_1)=a\,(t_3-t_1)\,(t_3-t_2)$$

ne segue che

$$a=\frac{H_2-H_1}{(t_3-t_1)\,(t_3-t_2)}$$

ora, sostituendo $H_2 - H_1 = H$, $t_3 - t_1 = \frac{\triangle T_0 - \triangle T_1}{2}$ e $t_2 - t_3 = \triangle T_0 - \frac{\triangle T_0 - \triangle T_1}{2} = \frac{\triangle T_0 + \triangle T_1}{2}$ (dalla geometria della figura), possiamo uguagliare il valore trovato di a con $-\frac{1}{2}g$, da cui

$$g = \frac{2H}{\frac{\triangle T_0 - \triangle T_1}{2} \cdot \frac{\triangle T_0 + \triangle T_1}{2}} = \frac{8H}{\triangle T_0^2 - \triangle T_1^2}$$

1.5.13 Una palla cade a terra da un'altezza di $15.0\,m$. Rimane in contatto col suolo per $20.0\,ms$ prima di arrestarsi. Qual è l'accelerazione media della palla mentre è in contatto col terreno ? (trattare la palla come puntiforme)

Soluzione: la velocità con cui giunge al suolo è ottenibile dalla consueta relazione $v = \sqrt{2hg}$, per cui

$$v = \sqrt{2 \cdot 15.0\,m \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}} = 17.1\,\frac{m}{s}$$

calcoliamo ora l'accelerazione, tramite la sua definizione, nel caso del moto uniformemente accelerato, $a = \frac{v_f - v_i}{\triangle t}$ per cui

$$a = \frac{(17.1 - 0)\,\frac{m}{s}}{20.0 \cdot 10^{-3}\,s} = 857\,\frac{m}{s^2}$$

1.5.14 Una palla viene scagliata verticalmente verso il basso con velocità iniziale v_0 da un'altezza h. (a) quale sarà la sua velocità subito prima di toccare il suolo? (b) quanto tempo impiegherà a raggiungere il suolo? (c) quali sarebbero le risposte ai punti precedenti se la palla fosse stata lanciata verticalmente verso l'alto dalla stessa altezza e con la stessa velocità iniziale?

Caso (a): nella maggior parte degli esercizi precedenti, si considerava la velocità iniziale nulla e quella finale era data da $v_f = \sqrt{2hg}$; in questo caso il corpo cade con una velocità diversa da zero e pari a v_0; questa velocità si sommerà quindi a quella che verrà acquisita in caduta, cioè, da $v_f^2 = v_0^2 + 2gh$, si ottiene

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Caso (b): il calcolo del tempo può essere fatto calcolando il rapporto tra la variazione della velocità e l'accelerazione che l'ha determinata, $\triangle t = \frac{v_f - v_0}{g}$; per cui

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{g}$$

Caso (c): la velocità finale rimane la stessa anche se il corpo viene scagliato verso l'alto. Infatti salendo il moto è decelerato e il corpo sale finchè la sua velocità non si annulla, dopo di che cade e passando nel punto da cui è stato lanciato, avrà ancora la stessa velocità v_0, ovviamente trascurando ogni aspetto dissipativo. Il tempo sarà invece maggiore, dovendo percorrere una distanza maggiore.

1.5.15 Un giocoliere lancia in aria delle palle a una certa altezza in verticale. A quale maggiore altezza dovrà lanciarle affinchè rimangano in aria per un tempo doppio?

Soluzione: supponiamo che la velocità con cui le palle vengono lanciate sia la stessa. Il tempo di volo è dato dalla fase di salita e dalla simmetrica fase di discesa. Nel punto di massima altezza tutte le palle avranno pertanto velocità nulla. Useremo quindi la relazione $h_{max} = v_f t + \frac{1}{2}gt^2$, con $v_f = 0$.
Si avrà quindi

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2}gt_1^2 \\ h_2 &= \frac{1}{2}gt_2^2 \end{aligned}$$

se ora poniamo $t_2 = 2t_1$ e sostituiamo, si ha $h_2 = 2gt_1^2$; calcoliamo il rapporto tra le due altezze e i rispettivi tempi di volo

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{2gt_1^2}{\frac{1}{2}gt_1^2} = 4$$

1.5.16 Si lancia verticalmente una pietra verso l'alto. Passa il punto A alla velocità v, e il punto B, $3.00\,m$ più in alto, alla velocità $v/2$. Calcolare (a) la velocità v (b) la massima altezza raggiunta oltre il punto B.

Caso (a): La distanza $\overline{AB} = 3.00\,m$. Ciò ci consente di utilizzare la relazione che descrive il legame tra le velocità è la distanza percorsa, cioè $v_B^2 = v_A^2 - 2gh$, da cui, essendo $v_B = \frac{1}{2}v_A = \frac{v}{2}$

$$\frac{v^2}{4} = v^2 - 2g \cdot 3 \quad \frac{3}{4}v^2 = 6g \quad v^2 = 8g$$

da cui

$$v = \sqrt{8 \cdot 9.8} = 8.85\,\frac{m}{s}$$

Caso (b): nel punto di massima altezza, la velocità si annulla, per cui se $v_f^2 = v_0^2 - 2gh$ con $v_f = 0\,\frac{m}{s}$ e $v_0 = 8.85\,\frac{m}{s}$, si ha

$$h = \frac{\left(8.85\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}} = 4.00\,m$$

da cui si ricava che la massima altezza si trova a

$$4.00\,m - 3.00\,m = 1.00\,m$$

dal punto B.

1.5.17 Per provare una palla da tennis la si lascia cadere da un'altezza di $4.00\,m$. Essa rimbalza fino all'altezza di $3.00\,m$. Se è stata a contatto con il suolo per $10\,ms$, qual è stata la sua accelerazione media durante il contatto?

Soluzione: Assumo come positivo il verso della velocità in risalita.
La palla scende da $4\,m$ e arriva al suolo con una velocità di $v_{suolo}^{arrivo} = \sqrt{2hg} = -8.85\,\frac{m}{s}$. La palla rimbalza poi solo fino a $3\,m$; ciò implica una riduzione della velocità iniziale verso l'alto, dovuta probabilmente allo schiacciamento della palla; la palla ripartirà con una velocità pari a $v_{suolo}^{uscita} = \sqrt{2hg} = +7.67\,\frac{m}{s}$. La variazione di velocità è avvenuta in $10\,ms$ e quindi

$$a = \frac{v_f - v_i}{\triangle t} = \frac{[7.67 - (-8.85)]\,\frac{m}{s}}{10^{-2}\,s} = 1652\,\frac{m}{s}$$

1.5.18 Dall'ugello di una doccia sgocciola l'acqua cadendo sul fondo posto $2.00\,m$ più in basso. Le gocce cadono a intervallo regolari: la quarta goccia si stacca nell'istante in cui la prima arriva al suolo. Trovare le posizioni della seconda e della terza in quello stesso istante.

Soluzione: osservando la situazione descritta, si può sicuramente pensare che durante il tempo di caduta della goccia 1, sgoccioleranno con regolarità altre due gocce, mentre la quarta, che si presenta quando la prima ha finito la sua caduta, rappresenta l'inizio di un nuovo ciclo. Ciò ci consente di dire che il periodo di caduta delle gocce è pari a un terzo del tempo di caduta della prima goccia.
Calcoliamo questo tempo, sapendo che la $v_0 = 0$. Da $s = \frac{1}{2}gt^2$, si ottiene la formula inversa

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,m}{9.8\,\frac{m}{s^2}}} = 0.639\,s$$

[la scelta di tre cifre decimali è funzionale alla divisibilità del numero per 3].
Dividendo per 3, troviamo il periodo di sgocciolamento: $T = 0.639 : 3 = 0.213\,s$.
Pertanto, quando la prima goccia è arrivata in fondo, la seconda ha percorso un tratto corrispondente a $t_2 = 0.426\,s$, mentre la terza goccia è comparsa da $t_3 = 0.213\,s$.
Calcoliamo ora, con la stessa formula indicata sopra, la distanza percorsa da queste due gocce.

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{1}{2} \cdot 9.8\,\frac{m}{s} \cdot (0.426\,s)^2 = 0.89\,m \\ s_2 &= \frac{1}{2} \cdot 9.8\,\frac{m}{s} \cdot (0.213\,s)^2 = 0.22\,m \end{aligned}$$

(N.B: Lo stesso esercizio può essere svolto sfruttando la proporzionalità tra le distanze percorse e i quadrati dei tempi impiegati:

$$2 : s_2 = 0.639^2 : 0.213^2$$

ottenendo $s_2 = 0.22\,m$. Questo esercizio ricorda, per coloro che l'hanno visto, il famoso piano inclinato galileiano, dove per mostrare la proporzionalità quadratica si mettono dei campanellini alle corrette distanze per sentire un suono ad intervalli di tempo regolari).

80P: Si lascia cadere una palla di piombo in un lago da un trampolino posto a $5.20\,m$ dalla superficie dell'acqua. Arriva in acqua ad una certa velocità e va a fondo mantenendo costante la stessa velocità. Raggiunge il fondo dopo $4.80\,s$ dal rilascio. (*a*) quanto è profondo il lago? (*b*) qual è la velocità media della palla? (*c*) se il lago venisse prosciugato e la palla lanciata allo stesso modo raggiungesse il fondo ancora in $4.80\,s$, quale sarà la velocità iniziale della palla?

Caso (*a*): il moto della palla può essere diviso in due parti: la prima, caduta in aria senza attrito, di moto uniformemente accelerato con partenza da fermo, la seconda, in acqua, di moto rettilineo uniforme (lo si riconosce dal testo quando specifica che in acqua la velocità rimane costante).
Calcoliamo pertanto la velocità con cui giunge sulla superficie dell'acqua,

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5.20\,m} = 10.1\,\frac{m}{s}$$

calcoliamo pure il tempo impiegato a percorrere questo tratto, da $s = \frac{1}{2}gt^2$, si ottiene

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5.20\,m}{9.8\,\frac{m}{s^2}}} = 1.03\,s$$

ne segue che il tempo di caduta in acqua corrisponde alla differenza tra il tempo complessivo e il tempo di volo in aria

$$t_{acqua} = 4.80\,s - 1.03\,s = 3.77\,s$$

Di conseguenza, essendo, come detto sopra, il moto in acqua di tipo rettilineo uniforme, si ha

$$profondit\,lago = vt = 10.1\frac{m}{s} \cdot 3.77\,s = 38.1\,m$$

Caso (b): la velocità media è il rapporto tra la distanza complessivamente percorsa ed il relativo tempo impiegato, cioè

$$v_{media} = \frac{(38.1 + 5.20)\,m}{4.80\,s} = 9.02\,\frac{m}{s}$$

Caso (c): se mancasse l'acqua, la palla si muoverebbe sempre di moto accelerato e, per percorrere la stessa distanza, impiegherebbe un tempo minore. Nel nostro caso, il tempo deve rimanere lo stesso. Ne segue che la palla deve percorrere una distanza maggiore, cioè deve essere prima lanciata verso l'alto in modo da dover percorrere una distanza maggiore. Vediamo come questa osservazione intuitiva è espressa dal calcolo.
Applichiamo la legge oraria del moto accelerato uniformemente, $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$, dove $a = -g$, da cui

$$43.3\,m = v_0 \cdot 4.80\,s + \frac{1}{2} \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot (4.80\,s)^2$$

e risolvendo rispetto a v_0 si ottiene

$$v_0 = \frac{(43.3 - 112.9)\,\frac{m}{s}}{4.80\,s} = -14.5\,\frac{m}{s}$$

1.5.19 Se un oggetto copre la metà del percorso totale di caduta nell'ultimo secondo della sua caduta da fermo, trovate (a) il tempo totale e (b) l'altezza della sua caduta.

Caso (a): dal testo si desume che la seconda metà del percorso viene coperta in $1\,secondo$. Se quindi indichiamo con t il tempo totale, la prima metà verrà percorsa in $(t-1)\,sec$. Traduciamo in equazioni, usando le leggi del moto uniformemente accelerato, e indicando con x la distanza complessiva:
seconda metà del tratto: $\frac{x}{2} = v_{\frac{1}{2}}t - \frac{1}{2}gt^2$, ma essendo $t = 1$ e sostituendo, si ha:

$$\frac{x}{2} = v_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}g \tag{1}$$

prima metà del tratto:

$$\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}g\,(t-1)^2 \tag{2}$$

Possiamo confrontare le due distanze uguali se riusciamo a trovare una relazione per $v_{\frac{1}{2}}$, cioè la velocità che l'oggetto ha a metà percorso. Quindi da $v_{\frac{1}{2}} = v_0 - gt$, ed essendo $v_0 = 0$ e $t = t - 1$, si ha $v_{\frac{1}{2}} = -g\,(t-1)$. Sostituendo tale relazione nella 1 si ottiene

$$\frac{x}{2} = -gt + g - \frac{1}{2}g = -gt + \frac{1}{2}g \tag{3}$$

Eguagliamo ora le due distanze, espresse dalla 3 e 2, applicando la proprietà transitiva dell'uguaglianza, troveremo

$$-gt + \frac{1}{2}g = -\frac{1}{2}g\,(t-1)^2$$

svolgendo il quadrato e moltiplicando tutto per 2, si ottiene

$$gt^2 - 4gt + 2g = 0$$

da cui, dividendo per g, che è quindi ininfluente sul risultato,

$$t^2 - 4t + 2 = 0$$

che ha come soluzioni algeriche

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 + \sqrt{2} = 3.41\,s \\ t_2 &= 2 - \sqrt{2} = 0.59\,s \end{aligned}$$

la soluzione $t_2$non ha però significato fisico, in quanto il tempo complessivo risulta minore di quello necessario a percorrere il secondo tratto, che è pari a 1 secondo. L'unica soluzione accettabile sarà pertanto

$$t = 3.41\,s$$

Caso (b): troviamo ora la distanza percorsa. Se il tempo complessivo è quello sopra indicato, si trova facilmente da, ricordando che $v_0 = 0$,

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot (3.41\,s)^2 = 57.0m$$

1.5.20 Un oggetto cadendo dal tetto di un edificio alto $43.2m$, finendo su una tettoia in lamiera, la deforma per una profondità di $45.7\,cm$. Quale accelerazione (supposta uniforme) ha subito durante l'urto? Esprimere la risposta in unità di g.

Soluzione: per rispondere a tale quesito è necessario conoscere prima la velocità con la quale il nostro oggetto giunge al suolo

$$v_{suolo}^2 = 2gh = 2g \cdot 43.2\,m = 86.4g \cdot m$$

Ora, siccome l'oggetto non rimbalza, ma schiaccia la lamiera su cui cade, tale velocità si annulla dopo altri $45.7\,cm$. Quindi

$$v_f^2 = v_{suolo}^2 - 2ah$$

da cui, essendo $v_f = 0$ si ha

$$0 = 86.4g \cdot m - 2a \cdot 0.457\,m$$

da cui, risolvendo rispetto ad a, si ottiene

$$a = \frac{86.4g \cdot m}{2 \cdot 0.457\,m} = 95g$$

1.5.21 Da un ponte alto $45m$ sul livello del fiume si lascia cadere una pietra. Dopo $1s$ un'altra pietra viene scagliata verso il basso. Le due pietre toccano l'acqua contemporaneamente. (a) qual era la velocità iniziale della seconda pietra?

Soluzione: dal testo si può desumere che la seconda pietra percorre la stessa distanza in caduta in un secondo in meno della prima, cioè $t_2 = t_1 - 1\,s$. Calcoliamo quindi il tempo che la prima pietra impiega per giungere al suolo, partendo da ferma

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45\,m}{9.8\,\frac{m}{s^2}}} = 3.03\,s$$

di conseguenza $t_2 = 2.03\,s$.
Calcoliamo ora la velocità iniziale della seconda pietra, utilizzando sempre la legge oraria $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ e sostituendo i valori noti

$$45\,m = v_0 \cdot 2.03\,s + \frac{1}{2} \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot (2.03\,s)^2$$

risolviamo rispetto a v_0, ottenendo

$$v_0 = \frac{45\,m - 4.9\,\frac{m}{s^2} \cdot (2.03\,s)^2}{2.03} = 12.2\,\frac{m}{s}$$

1.5.22 Un paracadutista si butta in caduta libera per $50m$. Poi il paracadute si apre, e da quel momento decelera con valore assoluto costante di $2.0m/s^2$. Tocca il suolo alla velocità di $3.0m/s$. (A) Per quanto tempo è rimasto in aria? (b) da che altezza è iniziata la caduta?

Caso (a): supponiamo che il paracadutista si lanci da un dirupo con velocità iniziale nulla; se si lanciasse da un aereo, infatti, il suo moto non potrebbe essere quello descritto dall'esercizio.
Anche in questo caso il moto può essere diviso in due parti, entrambe di moto accelerato, ma con accelerazione diversa.
Primo tratto: caduta libera con $v_0 = 0$, per cui

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50\,m}{9.8\,\frac{m}{s^2}}} = 3.2\,s$$

dopo questi $50\,m$ di caduta libera, prima che si apra il paracadute, avrà una velocità di

$$v_{f_1} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 50\,m \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}} = 31.3\,\frac{m}{s}$$

possiamo quindi calcolare il tempo di caduta nel secondo tratto, dalla legge delle velocità, $v_{f_2} = v_{f_1} - at$, da cui, risolvendo rispetto a t

$$t_2 = \frac{v_{f_1} - v_{f_2}}{a} = \frac{(31.3 - 3.0)\,\frac{m}{s}}{2\,\frac{m}{s^2}} = 14,1\,s$$

il tempo complessivo sarà allora

$$t_{1+2} = 3.2\,s + 14.1\,s = 17.3\,s$$

Caso (b): il primo tratto è noto ed è pari a $h_1 = 50m$; il secondo tratto può essere ricavato dalla conoscenza delle velocità iniziale e finale e dal valore assoluto dell'accelerazione, mediante la relazione $v_{f_2}^2 = v_{f_1}^2 - 2ah_2$; sostituendo i valori da noi trovati, si ha

$$\left(3.0\,\frac{m}{s}\right)^2 = \left(31.3\,\frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 2\,\frac{m}{s^2} h_2 \quad da\,cui \quad h_2 = \frac{\left(31.3^2 - 3.0^2\right)\,\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 2\,\frac{m}{s^2}} = 243\,m$$

Pertanto la distanza complessiva è di

$$h = h_1 + h_2 = 50\,m + 243\,m = 293\,m$$

1.5.23 Due oggetti iniziano la caduta libera da fermi e dalla stessa altezza, a un intervallo di $1s$ l'uno dall'altro. Quanto tempo dopo la partenza del primo verranno a trovarsi a $10m$ di distanza ?

Soluzione: i due moti si possono considerare sfasati di $1\,sec$. Scriviamo quindi le due leggi orarie che esprimono la distanza percorsa in funzione del tempo (anche qui la velocità iniziale è nulla, cioè $v_0 = 0$), assumendo come tempo zero quello in cui cade il primo oggetto:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{2}gt^2 \\ s_2 &= -\frac{1}{2}g\,(t-1)^2 \end{aligned}$$

se la loro distanza deve essere di $10m$ allora $s_2 - s_1 = 10$. Sottraiamo la prima alla seconda e uguagliamo a 10.

$$s_2 - s_1 = -\frac{1}{2}g\left(t^2 - 2t + 1\right) + \frac{1}{2}gt^2 = 10$$

risolvendo si ha

$$gt - \frac{1}{2}g = 10 \qquad t = \frac{10 + \frac{1}{2}g}{g} = 1,5\,s$$

1.5.24 Un aerostato sta salendo alla velocità di $12m/s$, e quando si trova a una quota di $80m$ lascia cadere un pacchetto. (a) Quanto impiega il pacchetto ad arrivare al suolo? (b) A che velocità urta il terreno?

Caso (a) nel momento in cui il pacchetto viene lasciato cadere, esso ha una velocità di $12m/s$ diretta verso l'alto. Una volta abbandonato, il pacchhetto diminuisce prima la propria velocità di salita, fino ad annullarsi per poi crescere, ma nel verso opposto.
Useremo la relazione $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, da cui

$$80m = -12t + 4.9t^2$$

e risolvendo rispetto a t (usando la formula ridotta), si ha

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 392}}{4.9}$$

considerando la soluzione positiva, si ottiene $t = 5.4\,s$.

Caso (b): anche in questo caso va tenuto conto della velocità iniziale diretta nel verso opposto al moto di caduta, per cui

$$v_f^2 = v_i^2 + 2gh = 144\,\frac{m^2}{s^2} + 2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 80m$$

da cui

$$v_f = \sqrt{144 + 1568} = 41.3\,\frac{m}{s}$$

1.5.25 La cabina scoperta di un ascensore sale alla velocità costante di $10m/s$. Una persona nella cabina lancia una palla direttamente verso l'alto da un'altezza di $2.0m$ sopra il pavimento della cabina, che si trova esattamente a $28m$ dal suolo. La velocità iniziale della palla rispetto all'ascensore è $20m/s$. (a) Quale altezza massima raggiunge la palla? (b) Quanto tempo impiega la palla per ritornare alla cabina dell'ascensore?

Caso (a): nell'istante in cui la palla viene lanciata si trova a $30m$ dal suolo e ha una velocità di $30m/s$, che si ottiene sommando il contributo della velocità dell'ascensore e di quello ottenuta con il lancio; entrambe le velocità hanno stessa direzione e verso. Pertanto, per trovare l'altezza applichiamo la relazione in cui non compare il tempo,

$$v_f^2 = v_0^2 - 2gh$$

ed essendo la $v_f = 0$ in corrispondenza dell'altezza massima, si ha

$$0 = 900\frac{m^2}{s^2} - 2 \cdot 9.8\frac{m}{s^2} \cdot h$$

da cui

$$h = \frac{900\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9.8\frac{m}{s^2}} = 46m$$

e sommando tale altezza a quella in cui si trova inzialmente la palla, si ha

$$h = 30m + 46m = 74m$$

Caso (b): mentre la palla sale, anche l'ascensore si sposta verso l'alto a velocità costante (moto rettilineo uniforme). Basterà pertanto confrontare le due leggi orarie, imponendo che, per incontrarsi nuovamente, ascensore e palla debbano trovarsi nello stesso posto allo stesso tempo:

$$\begin{cases} s = 10t \\ s = 30t - 9.8t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} s = 10t \\ 40t = 9.8t^2 \end{cases}$$

e risolvendo l'equazione di secondo grado in t dove la soluzione $t = 0$ rappresenta la posizione comune iniziale dei due corpi, si ha

$$t\,(9.8t - 40) = 0$$

da cui

$$t = \frac{40}{9.8} = 4.1\,s$$

1.5.26 Una sfera d'acciaio, lasciata cadere dal tetto di un edificio, passa davanti a una finestra, impiegando $0.125s$ a percorrerne «la luce verticale», che è di $1.20m$. Quindi cade sul marciapiede e rimbalza «perfettamente» fino a passare davanti alla finestra, impiegando ancora, dal bordo inferiore al superiore, $0.125s$. (Il volo verso l'alto è l'opposto di una caduta). Il tempo totale passato al disotto del davanzale della finestra è $2.00s$. Quanto è alto l'edificio?

Soluzione: Consideriamo prima le informazione relative al passaggio davanti alla finestra. La sfera cade con $v_i = 0$ e accelera, le velocità all'inzio e alla fine della finestra sono esprimibili tramite la grandezza della finestra

$$v_2^2 - v_1^2 = 2gh = 23.52\frac{m^2}{s^2}$$

D'altra parte le stesse velocità sono pure collegate tra di loro tramite il tempo di percorrenza

$$h = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t$$

da cui

$$v_1 + v_2 = \frac{2.40\,m}{0.125\,s} = 19.2\,\frac{m}{s}$$

Collegando le due relazioni si ha

$$\begin{cases} v_1 + v_2 & = & 19.2 \\ v_2^2 - v_1^2 & = & 23.52 \end{cases}$$

svolgendo il prodotto notevole, si ha

$$\begin{cases} v_1 + v_2 & = & 19.2 \\ (v_2 - v_1)(v_1 + v_2) & = & 23.52 \end{cases}$$

e sostituendo

$$\begin{cases} v_2 + v_1 & = & 19.2 \\ v_2 - v_1 & = & \frac{23.52}{19.2} = 1.23 \end{cases}$$

risolvendo, si ha

$$\begin{cases} v_1 & = & 8.98 \\ v_2 & = & 10.21 \end{cases}$$

Pertanto $v_1 = 8.98$ è la velocità con la quale la sfera arriva alla parte superiore della finestra, partendo da ferma. Ciò ci consente di calcolare in quanti metri è avvenuto questo incremento di velocità, da

$$v_1^2 = 2gh$$

si ricava

$$h = \frac{80.64}{19.6} = 4.1\,m$$

Il tratto di edificio fino al suolo viene percorso in $1\,s$ (essendo il moto «perfettamente» simmetrico), da cui

$$s = v_2 t + \frac{1}{2}gt^2 = 10.21\,\frac{m}{s} \cdot 1\,s + 4.9 \cdot 1\,s^2 = 15.1\,m$$

Sommando le varie distanze, si ottiene

$$h_{tot} = 4.1 + 1.2 + 15.1 = 20.4\,m$$