Capitolo 1

ESERCIZI SULLA PRESSIONE E SULLA SPINTA DI ARCHIMEDE

1. In un elevatore per auto utilizzato in un distributore, dell'aria compressa esercita una forza su un piccolo pistone di raggio $r_1 =$ 5 cm. Questa pressione viene trasmessa su un secondo pistone di raggio $r_2 =$ 15 cm. Quale forza deve essere esercitata dall'aria compressa per sollevare un'auto di massa $m =$ 1000 kg? Quale pressione produrrà questa forza?

Soluzione.

Se dovessimo sollevare l'auto senza l'elevatore, dovremmo applicare una forza uguale ed opposta alla forza peso della macchina. Essa è pari a $F_{peso} = mg = 1000 \cdot 9.8$ N $= 9800$ N. Questa è la forza che deve esercitare il secondo pistone. Dalla definizione pressione=forza/area, la pressione esercitata da esso è

$$P_2 = \frac{F_{peso}}{A_2} = \frac{F_{peso}}{\pi r_2^2} = \frac{9800}{3.14(0.15)^2} = 1.38 \cdot 10^5 \ Pa. \qquad (1.1)$$

Questa pressione viene trasmessa al secondo pistone (che la trasmette all'auto) dal primo. La pressione esercitata dal primo pistone è quindi $P_1 = P_2$. La forza esercitato da esso è

$$F_1 = P_1 \cdot A_1 = P_1 \cdot \pi r_1^2 = 1.38 \cdot 10^5 \cdot 3.14 \cdot 0.05^2 = 1089 \ N. \qquad (1.2)$$

Questa è la forza che deve essere applicata con l'elevatore per sollevare l'auto. Essa è molto minore della forza peso (9800 N) per cui è molto più semplice sollevare oggetti pesanti.

2. Uno specchio d'acqua ha lato $l = 2$ **m e profondità** $h = 30$ **cm. Determinare (a) il suo peso e (b) la pressione che l'acqua esercita sul fondo.** Soluzione.

La forza peso è

$$F_{peso} = m_{acqua} g, \tag{1.3}$$

dove m_{acqua} è la massa contenuta nello specchio d'acqua. Dalla definizione di densità $\rho = m_{acqua}/V$, dove V è il volume dello specchio, abbiamo che

$$m_{acqua} = \rho \cdot V = \rho l^2 h, \tag{1.4}$$

essendo il volume dello specchio $V = l^2 h$ (lo specchio è un parallelepipedo). Quindi la forza peso è (la densità dell'acqua è $\rho = 1000$ kg/m^3)

$$F_{peso} = \rho l^2 h g = 1000 \cdot 2^2 \cdot 0.3 \cdot 9.8 = 11760\ N. \tag{1.5}$$

Data l'area $A = l^2$ dello specchio d'acqua,la pressione esercitata sul fondo è

$$P = \frac{F_{peso}}{A} = \frac{11760}{2^2}\ Pa = 2940\ Pa. \tag{1.6}$$

3. Calcolare la pressione dell'oceano ad una profondità di $h =$**10 m. Si assuma che la densità dell'acqua sia** $\rho = 1000$ **kg/m**^{3} **e che la pressione atmosferica sia** $P_a = 10^5$ **Pa. Calcolare quindi la forza esercitata su un oblò di un sottomarino avente raggio** $R = 30$ **cm ad un profondità di 1000 m.**

Soluzione.

La pressione alla profondità h è pari a

$$\begin{aligned} P &= P_a + \rho g h \\ &= 10^5 + 1000 \cdot 9.8 \cdot 10 = 198000\ Pa \sim 2 \cdot 10^5\ Pa. \end{aligned}$$

Questo indica che a una pressione di 10 m la pressione è aumentata di un'atmosfera (10^5 Pa) rispetto alla superficie (dove vale un'atmosfera). Quindi la pressione aumenta di un'atmosfera ogni 10 m. A 1000 di profondità la pressione vare circa 100 atm = $100 \cdot 10^5$ Pa. La forza agente sull'oblò del sottomarino è

$$\begin{aligned} F &= P \cdot A = P \cdot \pi R^2 \\ &= 100 \cdot 10^5 \cdot 3.14 \cdot 0.3^2 = 283 \cdot 10^5 \; N. \end{aligned}$$

4. Un pezzo di alluminio di massa $m = 1$ kg e densità $\rho_{Al} = 2.7 \cdot 10^3$ kg/m^3 è sospeso tramite una corda e viene quindi immerso in un contenitore d'acqua. Calcolare la tensione del filo prima e dopo l'immersione.

Soluzione.

La forza peso dell'alluminio è

$$F_{peso} = mg = 1 \cdot 9.8 \; N = 9.8 \; N. \tag{1.7}$$

Essendo la massa sospesa con un filo, la tensione T del filo è la forza esercitata dal filo uguale e opposta alla forza peso (quindi diretta verso l'alto). Quindi $T = 9.8$ N.

Quando immergiamo la massa dentro l'acqua, oltre alla forza peso diretta verso il basso e alla tensione del filo diretta verso l'alto, abbiamo la spinta di Archimede, anch'essa diretta verso l'alto. Poichè la massa si trova in equilibrio, la risultante di queste tre forze deve essere zero. Attribuendo segno positivo alle forze dirette verso l'alto e segno negativo a quelle dirette verso il basso abbiamo dunque

$$T + F_{Archimede} - mg = 0. \tag{1.8}$$

Questa relazione ci permette di ricavare la tensione,

$$T = mg - F_{Archimede}. \tag{1.9}$$

Vediamo quindi che la tensione che deve esercitare il filo è ridotta rispetto al caso in cui il corpo è fuori dall'acqua a causa della spinta di Archimede. Dobbiamo ora calcolare quest'ultima. Essa è pari in modulo alla forza peso dell'acqua spostata quando l'alluminio è immerso. La massa d'acqua spostata è

$$m_{acqua} = \rho_{acqua} \cdot V, \tag{1.10}$$

dove V è il volume del corpo immerso. Poichè la densità dell'alluminio è $\rho_{Al} = m/V$, abbiamo che $V = m/\rho_{Al}$, e quindi la massa d'acqua è

$$\begin{aligned} m_{acqua} &= \rho_{acqua} \cdot V = \rho_{acqua} \cdot \frac{m/}{\rho_{Al}} \\ &= 1000 \cdot \frac{1}{2.7 \cdot 10^3} = 0.37\ kg. \end{aligned}$$

La spinta di Archimede è la forza peso di quest'acqua

$$F_{Archimede} = m_{acqua} g = 0.37 \cdot 9.8\ N = 3.63\ N. \tag{1.11}$$

La tensione è infine

$$T = mg - F_{Archimede} = 9.8 - 3.63\ N = 6.17\ N. \tag{1.12}$$

5. Determinare la frazione di massa di un iceberg che si trova sotto la superficie del mare. Si assuma che la densità dell'acqua liquida sia $\rho_{acqua} = 1024$ kg/m^3, mentre la densità del ghiaccio è $\rho_{ghiaccio} = 917$ kg/m^3.

Soluzione.

L'iceberg è un corpo parzialmente immerso. Sia V il suo volume totale e V_0 il volume immerso. La forza peso dell'iceberg tende a spingerlo verso il basso

$$F_{peso} = mg = \rho_{ghiaccio} V g, \tag{1.13}$$

dove la massa m dell'iceberg è pari alla sua densità per il suo volume ($\rho_{ghiaccio}V$). Verso l'alto agisce la spinta di Archimede, pari alla forza peso della massa d'acqua spostata. L'acqua spostata è

$$m_{acqua} = \rho_{acqua}V_0, \tag{1.14}$$

per cui la spinta di Archimede è

$$F_{Archimede} = m_{acqua}g = \rho_{acqua}V_0 g. \tag{1.15}$$

Poichè l'iceberg galleggia, la sua forza peso deve essere equilibrata dalla spinta di Archimede, cosicchè

$$F_{peso} = F_{Archimede}, \tag{1.16}$$

ovvero

$$\rho_{ghiaccio}Vg = \rho_{acqua}V_0 g. \tag{1.17}$$

Questa relazione ci permette di ricavare il rapporto fra il volume immerso V_0 e il volume totale V,

$$\frac{V_0}{V} = \frac{\rho_{ghiaccio}}{\rho_{acqua}} = \frac{917}{1024} = 0.89. \tag{1.18}$$

Questo mostra che quasi il 90% dell'iceberg è immerso e la parte emersa è solo il 10% della massa totale.

6. Calcolare l'area di contatto fra una ventosa completamente svuotata d'aria ed il soffitto a cui è attaccata necessaria per sostenere il peso di uno studente di massa $m = 80$ kg.

Soluzione.

Quando la ventosa viene schiacciata l'aria al suo interno viene eliminata. Di conseguenza la pressione P_a dell'aria all'esterno della ventosa che è diretta verso la ventosa non è più controbilanciata dalla pressione dell'aria al suo interno e la ventosa aderisce al muro. La forza che tiene la ventosa attaccata al muro è perciò

$$F = P_a A, \tag{1.19}$$

dove A è l'aria della ventosa. Questa forza deve controbilanciare la forza peso dello studente, che è pari a mg. Deve essere quindi

$$F = P_a A = mg. \tag{1.20}$$

Da questa relazione troviamo che area deve avere la ventosa,

$$A = \frac{mg}{P_a} = \frac{80 \cdot 9.8}{10^5} = 0.0078\ m^2. \tag{1.21}$$

Se la ventosa è un disco di raggio r, la sua area è $A = \pi r^2$, da cui il raggio è

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{0.0078}{3.14}} = 0.05\ m = 5\ cm. \tag{1.22}$$

7. Un mago si trova all'interno di una cassa chiusa ermeticamente alla profondità h =4 m in una vasca d'acqua. Se il coperchio della cassa misura 0.7×0.2 m^2, determinare la forza che deve essere esercitata sul coperchio per uscire dalla cassa.
Soluzione.
A 4 m di profondità l'acqua esercita sul coperchio una pressione pari a

$$\begin{aligned} P &= P_a + \rho g h \\ &= 10^5 + 1000 \cdot 9.8 \cdot 4 = 139200\ Pa. \end{aligned}$$

Questa pressione esercitata sul coperchio dà una forza

$$F = P \cdot Area(coperchio) = 139200 \cdot 0.7 \cdot 0.2\ N = 19500\ N. \tag{1.23}$$

Per uscire dalla cassa è necessario applicare una forza uguale in modulo e contraria a questa forza dovuta alla pressione dell'acqua.

8. Un oggetto in aria ha un peso F_1 =15 N e se immerso in acqua F_2 =12 N. In un altro liquido pesa invece F_3 =13 N. Determinare la densità dell'oggetto e del liquido.

Soluzione.

La forza peso in aria è $F_1 = mg$, dove m è la sua massa. Quindi la sua massa è

$$m = \frac{F_1}{g} = \frac{15}{9.8} = 1.5\ kg. \tag{1.24}$$

Poichè $m = \rho V$, dove ρ è la densità dell'oggetto mentre V è il suo volume, abbiamo $V = m/\rho$. Il peso dell'oggetto nell'acqua è

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 - F_{Archimede} = F_1 - \rho_{acqua} V g \\ &= F_1 - \rho_{acqua} \frac{m}{\rho} g. \end{aligned}$$

Possiamo usare questa equazione per ricavare la densità dell'oggetto ρ

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{acqua} \frac{mg}{F_1 - F_2} \\ &= 1000 \cdot \frac{1.5 \cdot 9.8}{15 - 12} = 4.9 \cdot 10^3\ kg/m^3. \end{aligned}$$

Abbiamo inoltre che $V = m/\rho = 1.5/4.9 \cdot 10^3$ m^3 $= 0.3 \cdot 10^{-3}$ m^3. Il peso dell'oggetto nel secondo liquido è invece

$$F_3 = F_1 - F_{Archimede} = F_1 - \rho_{liquido2} V g, \tag{1.25}$$

da cui troviamo che

$$\begin{aligned} \rho_{liquido2} &= \frac{F_1 - F_3}{Vg} \\ &= \frac{15 - 13}{0.3 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8} = 680\ kg/m^3. \end{aligned}$$

9. Un dirigibile viene riempito con $V = 400$ m^3 di elio (He). Determinare il carico che può venir sollevato (si assuma $\rho_{aria} =$ 1.29 kg/m^3 e $\rho_{He} = 0.18$ kg/m^3).
Soluzione.
La massa di elio è $m_{He} = \rho_{He}V$. Supponiamo che il carico abbia massa m_{carico}. Sulla massa d'elio e sul carico agisce la forza di gravità

$$\begin{aligned} F_{peso} &= m_{He}g + m_{carico}g \\ &= \rho_{He}Vg + m_{carico}g. \end{aligned}$$

Il volume di elio è "immerso" nell'aria per cui abbiamo una spinta di Archimede verso l'alto pari alla forza peso dell'aria spostata. La massa d'aria spostata è $m_{aria} = \rho_{aria}V$, per cui la spinta di Archimede è

$$\begin{aligned} F_{Archimede} &= m_{aria}g \\ &= \rho_{aria}Vg. \end{aligned}$$

Il massimo carico possibile è quello per cui la forza peso verso il basso e la spinta di Archimede verso l'alto hanno lo stesso modulo. Per massa maggiori la spinta di Archimede non riuscirà ad equilibrare il carico. Dunque

$$\begin{aligned} F_{peso} &= F_{Archimede} \\ \rho_{He}Vg + m_{carico}g &= \rho_{aria}Vg. \end{aligned}$$

Questa relazione ci dà

$$\begin{aligned} m_{carico} &= \rho_{aria}V - \rho_{He}V \\ &= 1.29 \cdot 400 - 0.18 \cdot 400 = 444\ kg. \end{aligned}$$

10. Una rana posta in un guscio semisferico galleggia in acqua avente densità $\rho_{acqua} = 1.358$ g/cm^3 senza affondare. Il guscio, di

massa trascurabile, ha raggio $R = 6$ cm. Determinare la massa della rana.
Soluzione.
Il volume del guscio è metà del volume della sfera completa,

$$V = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 = 0.00045\ m^3. \tag{1.26}$$

La massa d'acqua spostata è $m_{acqua} = \rho_{acqua} V$, per cui la spinta di Archimede è

$$F_{Archimede} = \rho_{acqua} V g = 1.358 \cdot 10^3 \cdot 0.00045 \cdot 9.8\ N = 6.02\ N. \tag{1.27}$$

Poichè il guscio non affonda, la forza peso della rana dentro in guscio deve essere equilibrata dalla spinta di Archimede. Dunque

$$m_{rana} g = F_{Archimede}, \tag{1.28}$$

da cui

$$m_{rana} = \frac{F_{Archimede}}{g} = \frac{6.02}{9.8} = 0.61\ kg. \tag{1.29}$$

11. Una pallina da ping-pong ha diametro $d = 3.8$ cm e densità $\rho = 0.084$ g/cm^3. Quale forza dobbiamo applicare sulla pallina per mantenerla immersa in acqua?
Soluzione.
La mssa della pallina è $m = \rho V$, dove V è il suo volume. Essendo il raggio $r = d/2$, il suo volume e la sua massa sono

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 = 28.7\ cm^3, \\ m &= \rho V = 0.084 \cdot 28.7\ g = 2.4\ g = 2.4 \cdot 10^{-3}\ kg. \end{aligned}$$

La forza peso della pallina è $F_{peso} = mg = 2.4 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8 = 23.6 \cdot 10^{-3}$ N. La spinta di Archimede agente verso l'alto è invece pari al peso dell'acqua spostata,

$$F_{Archimede} = \rho_{acqua} V g = 1000 \cdot 2.87 \cdot 10^{-5} \cdot 9.8 = 0.28\ N. \tag{1.30}$$

La forza complessiva agente sulla pallina è (assumendo la spinta di Archimede verso l'alto positiva e la forza peso verso il basso negativa)

$$F_{tot} = F_{Archimede} - F_{peso} = 0.28 - 0.0024\ N = 0.278\ N. \qquad (1.31)$$

La spinta di Archimede è molto maggiore della forza peso per cui una pallina sott'acqua tende a risalire. Per tenerla immersa è necessario applicare una forza uguale a contraria a questa.