I VETTORI

ESERCIZI Risolti e Discussi

1 Somma di vettori: metodo grafico

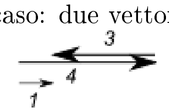
1.0.1 Si considerino due spostamenti, uno di modulo $3\,m$ e un altro di modulo $4\,m$. Si mostri in che modo si possono combinare i vettori spostamento per ottenere uno spostamento risultante di modulo $7\,m$, $1\,m$, $5\,m$.

Soluzione: Affrontando la somma di vettori, cioè la ricerca della risultante, dal punto di vista grafico, si possono presentare i seguenti casi:

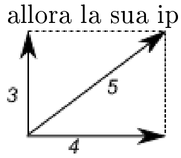
1. i due vettori sono paralleli e concordi (stesso verso): la somma è il vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso dei due vettori e modulo uguale alla somma dei due moduli
2. i due vettori sono paralleli e discordi (verso opposto): la somma è il vettore che ha la stessa direzione dei due vettori il verso è quello del vettore col modulo maggiore e il cui modulo è dato dalla differenza dei due moduli
3. i due vettori non sono paralleli, ma hanno in comune la coda (cioè il punto opposto alla freccia): la risultante è il vettore che rappresenta la diagonale del parallelogramma che ha i due vettori dati come lati consecutivi
4. i due vettori non sono paralleli e tali che la coda dell'uno coincida con la punta dell'altro: la risultante è il vettore che unisce il due vettori dati a formare un triangolo.
   Per quanto detto, è possibile pensare alle seguenti disposizioni:

1° caso: due vettori paralleli e concordi, poiché il vettore risultante ha modulo dato dalla somma dei due

2° caso: due vettori paralleli e discordi, la cui ha modulo dato dalla differenza dei due vettori

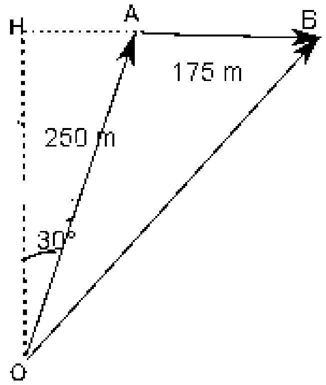


3° caso: i due vettori sono fra loro perpendicolari e la risultante è la diagonale del rettangolo che li ha come lati: infatti i numeri $3, 4, 5$ formano una terna pitagorica, cioè se 3 e 4 sono i cateti di un triangolo rettangolo, allora la sua ipotenusa è 5.



1.0.2 Una donna cammina per $250\,m$ in una direzione che forma un angolo di 30 verso est rispetto al nord, poi per $175\,m$ direttamente verso est. (a) Usando sistemi grafici si trovi uno spostamento finale dal punto di partenza. (b) si confronti il modulo del suo spostamento con la distanza che ha percorso.

Caso (a): la somma grafica dei due vettori si ottiene completando il parallelogramma che ha come lati consecutivi i due vettori, come mostrato in figura



Caso (b): per calcolare il suo spostamento (cioè il vettore risultante) osserviamo che il triangolo OHA è la metà di un triangolo equilatero. Da questa osservazione si deduce che $AH = \frac{AO}{2} = 125\,m$ e quindi $BH = 300\,m$. Inoltre OH è l'altezza di tale triangolo, per cui $OH = 125\sqrt{3}\,m$. Pertanto per trovare OB possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo OHB:

$$OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{46875 + 90000} = 370\,m$$

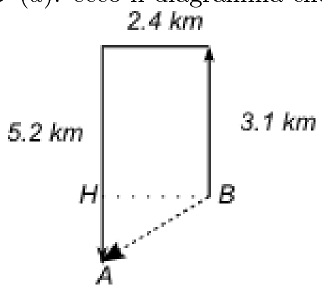
Come si può osservare il modulo dello spostamento è minore della distanza effettivamente percorsa, ma questo fatto è insito nella definizione di spostamento che viene calcolato considerando il punto iniziale e finale e non il percorso intermedio effettivamente fatto.

$$d_{percorsa} = 425\,m \qquad spostamento = 370\,m$$
$$differenza = 55\,m$$

L'angolo $\angle BOH = \arctan \frac{300\,m}{125\sqrt{3}\,m} = 54$

1.0.3 Una persona cammina su questo percorso: $3.1\,km$ verso nord, poi 2.4 verso ovest e infine 5.2 verso sud. (a) si costruisca il diagramma dei vettori che rappresenta questo movimento. (b) quale è la distanza e la direzione in linea retta per arrivare allo stesso punto finale?

Caso (a): ecco il diagramma che descrive lo spostamento (il nord nel foglio è verso l'alto)



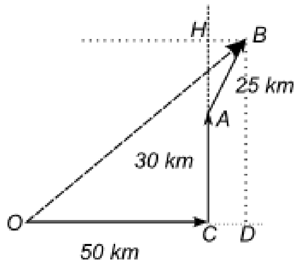
Caso (b): il vettore tratteggiato indica distanza e direzione in linea d'aria del punto di arrivo, ed è anche la risultante della somma dei tre vettori. La figura che si ottiene è quella di un trapezio rettangolo, di cui vogliamo conoscere il lato obliquo, noti gli altri lati. Il lato obliquo, AB, si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHB, dove $AH = 5.2 - 3.1 = 2.1\,km$ e $HB = 2.4\,km$

$$AB = \sqrt{2.1^2 + 2.4^2} = 3.2\,km$$

e la direzione sarà quella di sud ovest con un angolo di

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2.1}{2.4}\right) = 41.2$$

1.0.4 Un'automobile viaggia verso est per $50\,km$, poi verso nord per $30\,km$ e infine in direzione di 30 a est rispetto al nord per $25\,km$. Si disegni il diagramma di vettori e si determini lo spostamento totale dell'auto dal suo punto di partenza.



Il grafico mostra l'insieme degli spostamenti. Per determinare modulo e direzione, calcoliamo il segmento HB, in quanto il triangolo AHB è la metà di un triangolo equilatero. Quindi $HB = 12.5\,km$, cioè la metà del vettore AB. Ma $HB = CD = 12.5\,km$. Consideriamo ora il triangolo ODB. Il cateto $BD = AH + AC$, ma $AH = 12.5\sqrt{3} = 21.7\,km$, e quindi $BD = 21.7 + 30 = 51.7\,km$. Anche $OD = OC + CD = 50 + 12.5 = 62.5\,km$. Ne segue che, applicando il teorema di Pitagora al triangolo ODB, si ha

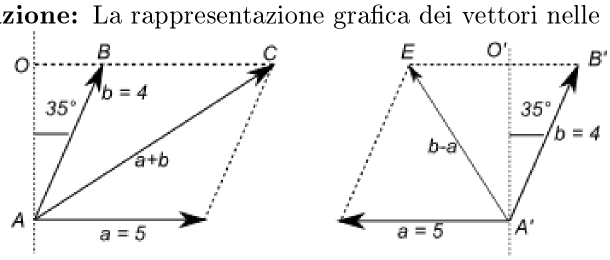
$$OB = \sqrt{51.7^2 + 62.5^2} = 81.1\,km$$

e l'angolo formato nella direzione nord est sarà

$$\alpha = \arctan\left(\frac{51.7}{62.5}\right) = 39.6$$

1.0.5 Il vettore $\overrightarrow{a}$ ha un modulo di 5.0 unità ed è orientato verso est. Il vettore $\overrightarrow{b}$ è orientato in direzione di 35 a est rispetto al nord e ha un modulo di 4.0 unità. Si costruiscano i diagrammi vettoriali per calcolare $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$. Si stimino i moduli e le direzioni dei vettori somma e differenza in base ai diagrammi.

Soluzione: La rappresentazione grafica dei vettori nelle due condizioni è quella mostrata in figura



Per calcolare i moduli e le direzioni delle risultanti, dobbiamo ricorrere ai teoremi della trigonometria. Calcoliamo il vettore $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ come ipotenusa del triangolo rettangolo AOC. Dobbiamo però prima calcolare il segmento OB, mediante il teorema dei triangoli rettangoli, per il quale ogni cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o il coseno dell'angolo adiacente.

$$OB = 4 \cdot \sin 35 = 2.29\,u$$

quindi

$$OC = OB + BC = 5 + 2.29 = 7.29\,u$$

calcoliamo poi OA

$$OA = 4 \cdot \cos 35 = 3.28\,u$$

Applicando il teorema di Pitagora, si ha quindi

$$AC = \sqrt{3.28^2 + 7.29^2} = 8\,u$$

la direzione di tale vettore, rispetto al nord è

$$\alpha = \arctan\left(\frac{7.29}{3.28}\right) = 65.8$$

Calcoliamo ora il modulo del vettore $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo $EO'A'$. Calcoliamo prima EO'

$$EO' = EB - O'B = 5 - 2.29 = 2.71\,u$$

Pertanto

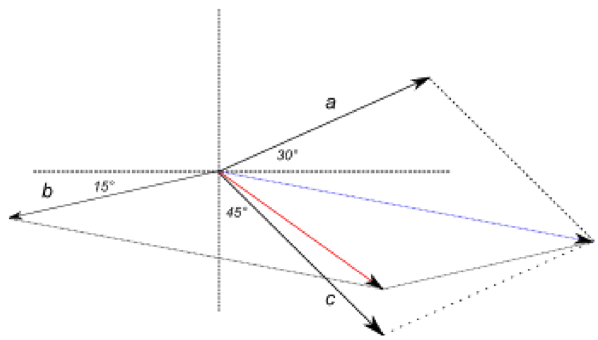
$$EA' = \sqrt{2.71^2 + 3.28^2} = 4.3\,u$$

la sua direzione, rispetto al nord dalla parte ovest, è

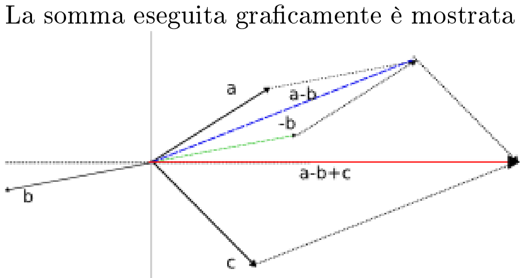
$$\beta = \arctan\left(\frac{2.71}{3.28}\right) = 39.6$$

1.0.6 Tre vettori, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ ciascuno con un modulo di 50 unità, giacciono sul piano xy e formano angoli rispettivamente di 30, 195 e 315 con l'asse x. Trovare con metodo grafico i moduli e le direzioni dei vettori (a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, (b) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ e (c) un vettore $\overrightarrow{d}$ tale che $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) - \left(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}\right) = 0$.

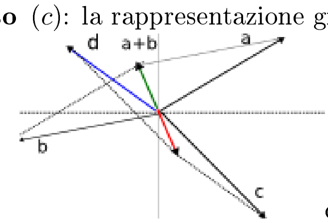
Caso (a): nel disegno sono riportate le direzioni dei vettori indicati e la loro somma.
il vettore in blu è la somma parziale tra a e c, mentre quello in rosso è la somma totale. (la somma di tre vettori si esegue applicando la proprietà associativa).



Caso (b): l'operazione $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ si esegue sommando al vettore $\overrightarrow{a}$, l'opposto del vettore $\overrightarrow{b}$ (in verde in figura). La somma eseguita graficamente è mostrata in figura

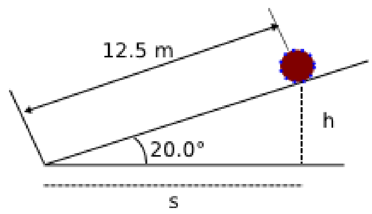


Caso (c): la rappresentazione grafica dell'espressione è data in figura



dove il vettore $\overrightarrow{d}$ è indicato in blu. La somma indicata nel testo risulterà nulla in quanto i vettori risultanti da $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$ sono uguali in modulo e direzione, ma opposti in verso.

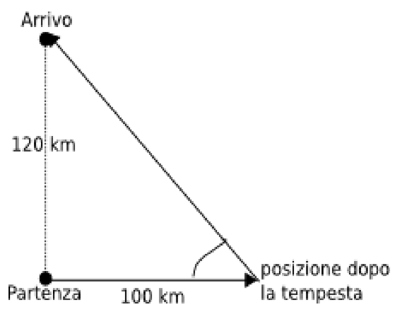
2.0.11 **Un corpo viene sollevato, trascinandolo per $12.5\,m$ su un piano inclinato di 20.0 rispetto al piano orizzontale. A che altezza si trova sollevato il corpo rispetto alla posizione di partenza? Qual è stato il suo spostamento orizzontale?**



Soluzione: Lo spostamento orizzontale richiesto è indicato dal segmento s in figura, mentre l'altezza dal segmento h. Questi segmenti formano con il tratto in salita un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa misura $12.5\,m$. Applicando i teoremi del triangolo rettangolo, si ha

$$\begin{aligned} h &= 12.5 \cdot \sin 20.0 = 4.28\,m \\ s &= 12.5 \cdot \cos 20.0 = 11.75\,m \end{aligned}$$

2.0.12 **Una nave si prepara a salpare per una destinazione situata $120\,km$ a nord del punto di partenza. Una tempesta spinge la nave in un punto posto a $100\,km$ a est del suo punto di partenza. A che distanza e in che direzione la nave deve ora fare rotta per raggiungere la destinazione originaria?**



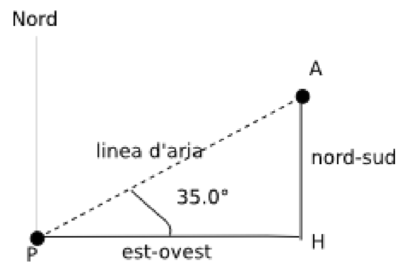
Soluzione: La figura mostra la situazione schematizzata. Si tratta di trovare l'ipotenusa del triangolo rettangolo, con il teorema di Pitagora

$$d = \sqrt{120^2 + 100^2} = 156\,km$$

l'angolo per individuare la direzione è quello indicato in figura è ottenibile sempre con il teorema dei triangoli rettangoli

$$\alpha = \arctan \frac{120}{100} = 50.2$$

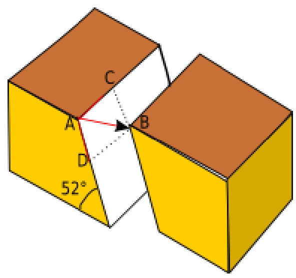
2.0.13 **Una persona desidera raggiungere un punto che si trova a $3.40\,km$ di distanza dalla sua attuale posizione, in direzione 35.0 a nord-est. Ma questa persona è costretta a percorrere strade orientate nord-sud o est-ovest. Qual è la lunghezza dell'itinerario minimo che essa potrebbe percorrere per raggiungere la sua destinazione?**



Soluzione: Gli spostamenti est-ovest o nord-sud rappresentano le coordinate del punto A, supposto P come origine. Il percorso minimo è quindi la somma dei segmenti PH e AH.

$$d = AH + PH = 3.40\,(\sin 35.0 + \cos 35.0) = 4.74\,km$$

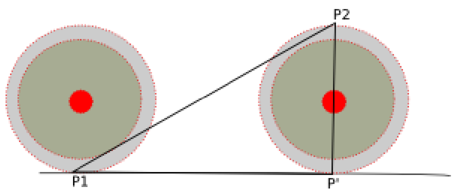
2.0.14 **I punti A e B della figura sotto originariamente coincidevano. Lo spostamento netto AB è avvenuto lungo il piano di scorrimento. AC è lo scorrimento orizzontale di AB, mentre AD è lo scorrimento verso il basso di AB. Qual è lo spostamento netto AB se $AC = 22.0\,m$ e $AD = 17.0\,m$? Se il piano di scorrimento è inclinato di 52.0 rispetto all'orizzontale, qual è la componente verticale di AB?**



Soluzione: Lo spostamento netto è ottenibile, facendo riferimento alla figura, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ADB, di cui AB è l'ipotenusa:

$$\overline{AB} = \sqrt{22.0^2 + 17.0^2} = 27.8\,m$$

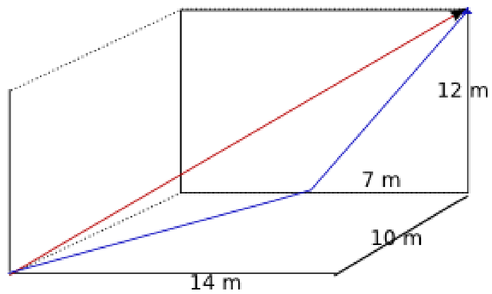
2.0.15 **Una ruota con raggio $45.0\,cm$ rotola senza scivolare su un piano orizzontale. P è un segno sul bordo della ruota. Nell'istante t_1 P è sul punto di contatto con il piano; al tempo t_2 si trova ruotata di mezzo giro. Trovare lo spostamento di P in questo intervallo di tempo.**



Soluzione: Lo spostamento del punto è indicato in figura con il segmento P_1P_2. Il tratto $P_1P^{'}$ corrisponde a metà circonferenza, in quanto la rotazione indicata è di mezzo giro; il segmento $P^{'}P_2$ è il diametro della ruota. Calcoliamo pertanto lo spostamento, considerandolo come l'ipotenusa del triangolo $P_1P^{'}P_2$, con il teorema di Pitagora:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(45\pi)^2 + 90^2} = 167.7\,cm$$

2.0.16 **Le dimensioni di un locale sono, in metri,** 10, 12, 14. **Una mosca parte da un angolo della stanza e vola fermandosi infine all'angolo opposto, in diagonale, a quello di partenza. Determinare il modulo del suo spostamento. Stabilire se vi può essere un tragitto minore, maggiore o uguale a questo. Infine, se la mosca si spostasse solo sulle pareti, quale sarebbe il percorso più breve?**



Soluzioni: La risposta al primo quesito è rappresentata dalla lunghezza del vettore in rosso disegnato in figura, cioè la diagonale del parallelogramma:

$$d = \sqrt{(10^2 + 12^2 + 14^2)} = 21\,m$$

Questo è anche il percorso più breve che unisce i due punti indicati (la lunghezza di un segmento è la distanza tra due punti, cioè il percorso più breve). Vi può essere un percorso maggiore in tutti i casi in cui la mosca si discosta da questo tragitto. La condizione di uguaglianza si ha pertanto se il percorso è quello indicato dalla diagonale.
Il percorso più breve lungo le pareti è quello segnato in blu, la cui lunghezza è:

$$d_1 + d_2 = \sqrt{10^2 + \left(\frac{14}{2}\right)^2} + \sqrt{12^2 + \left(\frac{14}{2}\right)^2} = 21.1\,m$$

3 Somma di Vettori tramite le componenti

3.0.17 **Trovare le componenti del vettore $\overrightarrow{r}$, somma dei vettori spostamento $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$, le cui componenti in metri lungo le tre direzioni perpendicolari sono:** $c_x = 7.4$, $c_y = -3.8$, $c_z = -6.1$, $d_x = 4.4$, $d_y = -2.0$, $d_z = 3.3$

Soluzione: la soluzione è basata sul calcolo vettoriale, cioè

$$\begin{aligned} r_x &= c_x + d_x = 11.8 \\ r_y &= c_y + d_y = -5.8 \\ r_z &= c_z + d_z = -2.8 \end{aligned}$$

3.0.18 Calcola la somma dei due vettori espressi mediante i vettori unitari: $\overrightarrow{a} = 4.0\overrightarrow{i} + 3.0\overrightarrow{j}$ e $\vec{b} = -13.0\overrightarrow{i} + 7.0\overrightarrow{j}$; calcola poi il modulo e la direzione del vettore somma.

Soluzione: I due vettori sono complanari nel piano xy. Per trovare il vettore somma, sommiamo le loro componenti vettoriali, per cui

$$\overline{a+b} = \overrightarrow{c} = (4.0 - 13.0)\overrightarrow{i} + (3.0 + 7.0)\overrightarrow{j} = -9.0\overrightarrow{i} + 10.0\overrightarrow{j}$$

Per calcolare il modulo basta applicare

$$c = \sqrt{(-9.0)^2 + 10.0^2} = \sqrt{181} = 13.4$$

la direzione si ottiene

$$\alpha = \arctan\left(\frac{10.0}{-9.0}\right) = 312$$

3.0.19 Se $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, che cosa sono $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$?

Soluzione: Mettendo a sistema le due relazioni, si ottiene

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} &= 2\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= 4\overrightarrow{c} \end{cases}$$

sommando la prima equazione alla seconda, si ha

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} &= 2\overrightarrow{c} \\ 2\overrightarrow{a} &= 6\overrightarrow{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} &= 2\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a} &= 9\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} \overrightarrow{b} &= 9\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{i} - 8\overrightarrow{j} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{a} &= 9\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} \end{cases}$$

3.0.20 Un vettore $\overrightarrow{B}$, se sommato al vettore $\overrightarrow{C} = 3.0\overrightarrow{i} + 4.0\overrightarrow{j}$, dà un vettore risultante diretto nel verso positivo dell'asse y e modulo pari a quello di $\overrightarrow{C}$. Calcolare il modulo di $\overrightarrow{B}$.

Soluzione: Calcoliamo il modulo del vettore $\overrightarrow{C}$.

$$C = \sqrt{9+16} = 5$$

quindi il vettore risultante $\overrightarrow{A} = \overline{B+C}$ avrà modulo 5. Ora il vettore deve essere diretto nel verso positivo dell'asse y e pertanto, tenendo conto anche del valore del suo modulo, avrà le seguenti componenti vettoriali

$$\overrightarrow{A} = 0\overrightarrow{i} + 5.0\overrightarrow{j}$$

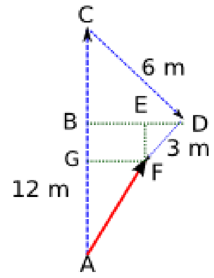
pertanto

$$\begin{aligned} B_x &= 3.0 - 0 = 3.0 \\ B_y &= 5.0 - 4.0 = 1.0 \end{aligned}$$

il modulo di $\overrightarrow{B}$ sarà

$$B = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = 3.2$$

3.0.21 **Un giocatore di golf riesce a mettere in buca in tre colpi. Il primo colpo sposta la palla $12\,m$ verso nord, il secondo $6.0\,m$ verso sud-est, e il terzo $3.0\,m$ verso sud-ovest. Quale spostamento sarebbe stato necessario far compiere alla palla per piazzarla nella buca al primo tiro?**



Soluzione: Osserviamo la figura. I triangoli CDB, FED sono rettangoli isosceli (metà di un quadrato), tenuto conto delle direzioni indicate nei dati. Sapendo che la relazione tra lato e diagonale di un quadrato è

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

si ha

$$BD = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,2\,m$$

analogamente

$$ED = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2,1\,m$$

si ha quindi

$$BE = GF = 4,2 - 2,1 = 2,1\,m$$

inoltre $CG = CB + BG = BD + ED = 4,2 + 2,1 = 6,3\,m$
Pertanto

$$AG = 12 - 6,3 = 5,7\,m$$

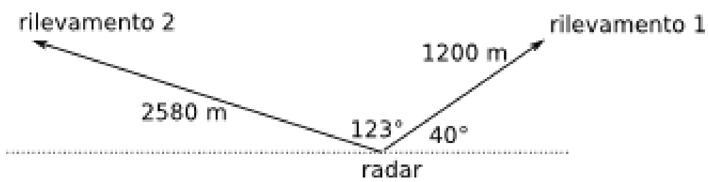
possiamo ora calcolare il modulo del vettore spostamento AF,

$$AF = \sqrt{AG^2 + GF^2} = \sqrt{5,7^2 + 2,1^2} = 6\,m$$

La direzione si può calcolare rispetto alla direzione nord, calcolando l'angolo $G\widehat{A}F$

$$G\widehat{A}F = \arctan\frac{GF}{AG} = \arctan\frac{2,1}{5,7} = 20,2$$

3.0.22 **Una stazione radar aggancia un aereo in avvicinamento proveniente da est. Alla prima osservazione il rilevamento è di $1200\,m$ a 40 sopra l'orizzonte. Come nella figura, l'aereo è seguito per altri 123 calcolati in un piano verticale orientato est-ovest, finché scompare dallo schermo dopo un ultimo rilevamento a $2580\,m$. Trovare lo spostamento dell'aereo mentre era seguito dal radar.**



Ricordate??? Buon lavoro! Prof. Andreoletti